数理解析研究所講究録
399巻 1980年 53-65

Decomposable operator が Spectral operator になる条件

東北薬科大学　棚橋浩太郎

Spectral operator の1つの自然な拡張として，decomposable operator がある。逆に，decomposable operator がいつ spectral operator になるかについて，Wadhwa[5]が，Hilbert space 上で，条件(I)をもてばよいことを示した。また、それとは別に、Jaffarian[2]が reductive quasidecomposable operator は spectral になることを示した。更に、この結果を拡張したものに、Wadhwa[6]がある。ここでは　これらの結果をまとめて述べよう。考えている空間は　complex Hilbert space Hである。

§1. 準備

ここでは，spectral operator，decomposable operator の定義，また証明に必要な基本的な結果をまとめておく。

Def. 1.1　$T \in B(H)$ が spectral operator とは，

$\exists\, E(\cdot)$: σ-additive projection valued set function on Borel field

(i) $T E(\sigma) = E(\sigma) T$　　　$\forall \sigma$ Borel set

(ii) $\sigma(T \mid E(\sigma)H) \subset \bar{\sigma}$ $\quad {}^{\forall}\sigma$ Borel set.

Prop 1.2

$T \in B(H)$ spectral operator

$\Longleftrightarrow$ $T = S + Q$; S は normal operator と similar

Q は quasinilpotent ie $\sigma(Q) = \{0\}$

$SQ = QS$

$\Longleftrightarrow$ T は条件 (A) (B) (C) (D) をみたす。

注：上の S は $S = \int \lambda \, dE(\lambda)$ であり，scalar part という。

また，この分解 $S + Q$ は一意である。次に，主定理の

証明に (A) (B) (C) (D) が必要なので，説明していこう。

Def 1.3

$T \in B(H)$ が条件 (A) をみたすとは

$D \subset \mathbb{C}$ open, $f : D \to H$ analytic, $(\lambda - T) f(\lambda) \equiv 0$ on D

$\Rightarrow$ $f \equiv 0$ on D

Def 1.4

$T \in B(H)$ が (A) をみたすとき，$x \in H$ に対し $(\lambda - T)^{-1} x$ は，

$$(\lambda - T) f(\lambda) \equiv x$$

をみたす analytic function であるが，条件 (A) より上式をみたす analytic function は一意に定まる。この analytic functions の union を，$(\lambda - T)^{-1} x$ の maximal extension $x(\lambda)$ といい，その定義域を $\rho_T(x)$; local resolvent set と表わす。また，

$\sigma_T(x) = \mathbb{C} \setminus \rho_T(x)$: local spectrum と定める。

注：たとえば，T normal, hyponormal, dominant, spectral, decomposable, $\sigma(T)$ nowhere dense, $\sigma_p(T) = \phi$ ならば，(A)をもつ。

(A) をもたない例については，

Prop 1.5. $T \in B(H)$ が (A) をみたすとき，

(i) $\sigma_T(x) \subset \sigma(T)$, closed set $\quad {}^\forall x \in H$

(ii) $\sigma_T(x) = \phi \iff x = 0$

(iii) $ST = TS \Rightarrow \sigma_T(Sx) \subset \sigma_T(x) \quad {}^\forall x \in H$

(iv) $\bigcup_{x \in H} \sigma_T(x) = \sigma(T)$

Def 1.6.

$T \in B(H)$，(A) が条件(B) をみたすとは，

$\exists K > 0$; $\sigma_T(x) \cap \sigma_T(y) = \phi \Rightarrow \|x\| \leqq K \|x + y\|$

Def 1.7.

$T \in B(H)$ (A) が条件 (C) をみたすとは，

$X_T(F) \equiv \{ x \in H ; \sigma_T(x) \subset F \}$

が，任意の closed set $F \subset \mathbb{C}$ に対して，closed になる。

Def 1.8.

$T \in B(H)$，(A)(B)のとき，subset $\sigma \subset \mathbb{C}$ が $\mathcal{S}_1$ に属すとは，

$\{ x + y \in H : \sigma_T(x) \subset \sigma, \sigma_T(y) \subset \sigma' \}$ dense in H

但，σ' は σ の complement $\mathbb{C} \setminus \sigma$ を表わす

ここで，$\sigma \in \mathcal{S}_1$ に対し $E(\sigma) : x + y \to x$ と定めて，

Prop 1.9. $T \in B(H)$ (A) (B). のとき, $\sigma \in \mathcal{S}_1$ に対し

$$\exists 1\ E(\sigma)\ \text{projection}: \begin{array}{ll} E(\sigma)x = x & \text{if } \sigma_T(x) \subset \sigma \\ E(\sigma)x = 0 & \text{if } \sigma_T(x) \subset \sigma' \\ \|E(\sigma)\| \leqq K & \end{array}$$

注: ここで projection は $E^2 = E$ を意味して, self-adjoint をつけくわえるときは, orthogonal projection ということにする。また, T が spectral のときは,

$$X_T(F) = E(F)H \qquad {}^\forall F \subset \mathbb{C} \text{ closed}$$

となっている。

Def 1.10.

$T \in B(H)$, (A) (B), $\sigma \in \mathcal{S}_1$ とするとき. σ が family $\mathcal{S}_2$ に属すとは, ${}^\forall \varepsilon > 0$, ${}^\forall x \in H$, $\exists x_1, x_2 \in H$

$$; \sigma_T(x_1) \subset \sigma_T(x) \cap \sigma,\ \sigma_T(x_2) \subset \sigma_T(x) \cap \sigma'$$

$$\|x_1 + x_2 - x\| < \varepsilon$$

更に, $\sigma \in \mathcal{S}_2$ が family $\mathcal{S}$ に属すとは,

$$\exists F_n, E_n \text{ closed set} \in \mathcal{S}_2;\ F_n \subset \sigma,\ E_n \subset \sigma'$$

$$x = \lim_{n \to \infty} \{E(F_n) + E(E_n)\} x \qquad {}^\forall x \in H.$$

注: T (A) (B) (C) のとき, $E(\cdot)$ は Boolean algebra $\mathcal{S}$ 上の σ-additive spectral measure になるわけだが, 残っている条件(D)は, Borel set が $\mathcal{S}$ に含まれるための条件である。実は(D)は, 別の表現がされているが, ここでは次のようにしておく。

Def 1.11 $T \in B(H)$ (A) (B) (C) が 条件(D)をみたすとは、
任意の closed set は $\mathcal{J}$ に属す。

次に decomposable operator とその基本的な性質を説明していこう。

Def. 1.12.

$T \in B(H)$ とする。subspace $\mathcal{Y} \subset H$ が、T の spectral maximal space とは (i) $T\mathcal{Y} \subset \mathcal{Y}$

(ii) T の invariant subspace $\mathfrak{M}$ が

$$\sigma(T|\mathfrak{M}) \subset \sigma(T|\mathcal{Y}) \Rightarrow \mathfrak{M} \subset \mathcal{Y}$$

Def 1.13

$T \in B(H)$ が decomposable とは、

${}^\forall\{G_i\}_{i=1}^n$ finite open covering of $\sigma(T)$,

${}^\exists\{\mathcal{Y}_i\}_{i=1}^n$ spectral maximal space of T ; (i) $\sigma(T|\mathcal{Y}_i) \subset G_i$

(ii) $H = \mathcal{Y}_1 + \cdots + \mathcal{Y}_n$

注：(ii)の和は直和ではなく、単に和の形に表現できるということを示す。spectral operator は decomposable である。

Prop 1.14

$T \in B(H)$ (A) とする。$X_T(F)$ が closed なら、$X_T(F)$ は T の spectral maximal space で、$\sigma(T|X_T(F)) \subset \overline{F} \cap \sigma(T)$

Prop 1.15.

$T \in B(H)$ が decomposable なら 条件 (A), (C) をみたす。

よって，$X_T(F)$ は $^\forall F \subset \mathbb{C}$ closed に対し spectral maximal space of T になるが，逆に，T の任意の spectral maximal space $\mathcal{Y}$ は $\mathcal{Y} = X_T(\sigma(T|\mathcal{Y}))$ と表わされる。

§2. 本論

Def 2.1. $T \in B(H)$，(A)(C) が条件(I)をみたすとは，

$$\sigma_T(P_F x) \subset \sigma_T(x) \qquad {}^\forall F \subset \mathbb{C} \text{ closed}$$

但，P_F は $X_T(F)$ への orthogonal projection

Th. 2.2.

$T \in B(H)$ decomposable で (I) をみたすなら，

$T = N + Q$; N normal, Q: quasinilpotent, $NQ = QN$

ie T は spectral operator with normal scalar part.

以下，この定理を証明していく。Prop 1.15 より (A)，(C) はよく知られているので，(B)，(D)を示していこう。

lemma 2.3.

$T \in B(H)$ decomposable が (I)をみたすなら，

$$(B_0) \quad \sigma_T(x) \cap \sigma_T(y) = \phi \quad \Rightarrow \quad (x, y) = 0$$

をみたす。よって，このとき，$\|x\| \leqq \|x + y\|$

証：$\sigma_T(x) = F$，P_F を subspace $X_T(F)$ への orthogonal projection とする。条件(I)より $\sigma_T(P_F y) \subset \sigma_T(y)$ また，

$P_F y \in X_T(F)$ より $\sigma_T(P_F y) \subset F$

$$\therefore \sigma_T(Py) \subset \sigma_T(y) \cap F = \sigma_T(y) \cap \sigma_T(x) = \phi$$

$$\therefore Py = 0$$

$$\therefore (x, y) = (Px, y) = (x, Py) = (x, 0) = 0 \quad //$$

lemma 2.4.

$T \in B(H)$ decomposable が (I) をみたすなら、

$$H = X_T(F) \oplus \overline{X_T(F')} \qquad {}^{\forall} F \subset \mathbb{C} \text{ closed.}$$

証：lemma 2.3 より

$$X_T(F) \perp X_T(F') \qquad \therefore X_T(F) \subset X_T(F')$$

逆を示そう。$F \subset G$ open を任意にとると $\{G, F'\}$ は $\sigma(T)$ の open covering になるから

$\exists \mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2$: T の spectral maximal space

(i) $\sigma(T|\mathcal{Y}_1) \subset G$, $\sigma(T|\mathcal{Y}_2) \subset F'$ (ii) $H = \mathcal{Y}_1 + \mathcal{Y}_2$

ここで、${}^{\forall}x \in X_T(\overline{G})^{\perp}$ を $x = x_1 + x_2$, $x_i \in \mathcal{Y}_i$

と分解すると $\quad 0 = P_{\overline{G}}\, x = x_1 + P_{\overline{G}}\, x_2$

$$\therefore \sigma_T(x_1) = \sigma_T(P_{\overline{G}}\, x_2) \subset \sigma_T(x_2)$$

$$\therefore \sigma_T(x) \subset \sigma_T(x_1) \cup \sigma_T(x_2) \subset \sigma_T(x_2) \subset \sigma(T|\mathcal{Y}_2) \subset F'$$

$$\therefore X_T(\overline{G})^{\perp} \subset X_T(F') \quad \therefore X_T(\overline{G}) \supset X_T(F')^{\perp}$$

ここで $G \supset F$ は任意だから

$$X_T(F) = \bigcap_{G \supset H \text{ open}} X_T(\overline{G}) \supset X_T(F')^{\perp}$$

$$\therefore X_T(F) = X_T(F')^{\perp} \qquad \therefore X_T(F)^{\perp} = \overline{X_T(F')}$$

$$\therefore H = X_T(F) \oplus \overline{X_T(F')} \; //$$

lemma 2.5　$T \in B(H)$, decomposable，(I) は条件 (D) をみたす。

証：$F \subset \mathbb{C}$ closed を任意にとる。lemma 2.4 より

$$H = X_T(F) \oplus \overline{X_T(F')}$$

なので，$F \in \mathcal{S}_1$ は明らか。また，$X_T(F)$ への orthogonal projection P_F は定義から $E(F_1)$ に等しいので，$H_n \subset F'$ closed，$\cup H_n = F'$ となる増加列をとると

$$x = \lim_{n\to\infty} (P_F + P_{H_n})x = \lim \{E(F) + E(H_n)\}x$$

となって，条件 (I) より

$$\sigma_T(E(F)x) \subset F \cap \sigma_T(x),\ \sigma_T(E(H_n)x) \subset H_n \cap \sigma_T(x) \subset F' \cap \sigma_T(x)$$

よって，$F \in \mathcal{S}_2$　また，この式から，$F \in \mathcal{S}$ であることも明らか。

Th. 2.2 の証明．

T が (A) (B) (C) (D) をみたすことがわかったので，Prop 1.2 より T は spectral operator である。よって scalar part $\int \lambda dE$ が normal になる，よって $E(\cdot)$ が self adjoint になることを示せばよい。$F \subset \mathbb{C}$ closed として十分である。$x, y \in H$，lemma 2.5 のように $H_n \subset F'$ をとると

$$(E(F)x, (1 - E(F))y) = (E(F)x, E(F')y)$$

$$= \lim (E(F)x, E(H_n)y)$$

ここで，$\sigma_T(E(F)x) \subset F$，$\sigma_T(E(H_n)y) \subset H_n \subset F'$ 故，lemma 2.3 より　$(E(F)x, (1 - E(F))y) = 0$

$$\therefore E(F)(1 - E(F))^* = 0 \quad \therefore E(F) = E(F) \cdot E(F)^* \quad //$$

A. A. Jaffaman[ ]は、同様の結果を reductive quasi-decomposable operator について成立することを示した。彼の方法は spectral measure を実際に作っていったのだが、ここでは、Th. 2.2と同様の論法で別証明する。

Def 2.6

$T \in B(H)$ が quasidecomposable とは、条件(A)をみたし、$\forall \{G_i\}_{i=1}^{n}$ finite open covering of $\sigma(T)$, $\exists \{F_i\}_{i=1}^{n}$ closed set

(i) $F_i \subset G_i$ (ii) $\sigma(T) = \cup F_i$ (iii) $X_T(F_i)$ closed

(iv) $H = \vee X_T(F_i)$

但、$\vee X_T(F_i)$ は closed linear span of $\{X_T(F_i)\}$

注: $T \in B(H)$ が decomposable なら quasi-decomposable であることは、Prop 1.15 よりわかる。quasi-decomposable であるが、decomposable とならない例は、Albrecht [ ]を参照。

lemma 2.7.

$T \in B(H)$ quasi-decomposable operatorは、(C) をみたす。

証: $X_T(F) = X_T(F \cap \sigma(T))$ だから、$F \subset \sigma(T)$ closed のとき考えればよい。$G \supset F$ open を任意にとると、$\{G, F'\}$ は $\sigma(T)$ の open covering である。よって

$\exists F_1 \subset G$, $F_2 \subset F'$ closed

(i) $\sigma(T) = F_1 \cup F_2$, (ii) $X_T(F_i)$ closed (iii) $H = \overline{X_T(F_1) + X_T(F_2)}$

ここで、$\sigma(T) = F_1 \cup F_2$, $F_2 \subset F'$ より $F \subset F_1$

$$\therefore\ X_T(F) \subset X_T(F_1)$$

$$\therefore\ X_T(F) \subset \bigcap_{G\supset F} X_T(F_1) \equiv Z$$

逆に $x \in Z$ なら

$\sigma_T(x) \subset F_1 \subset G$, $G \supset F$ は任意故 $\sigma_T(x) \subset F$

$\therefore x \in X_T(F)$ $\therefore X_T(F) = Z$ closed //

Th. 2.8

$T \in B(H)$ reductive, quasidecomposable operator は spectral operator with normal scalar part.

証: lemma 2.7 より T は (C) をもつ。よって reductive 故 $X_T(F)$ $^\forall F \subset \mathbb{C}$ closed は T の reducing subspace になる。よって Prop 1.5 (iii) より T は条件 (I) をもつことがわかる。

次に、$\sigma(T|X_T(F)^\perp) \subset \overline{F'}$ $^\forall F \subset \mathbb{C}$ closed

となることを示そう。もし、そうでないとすると、

$\exists \lambda_0 \in \sigma(T|X_T(F)^\perp) \setminus \overline{F'}$,

$\therefore \exists \varepsilon > 0$, $G_0 \equiv \{\lambda \mid |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon\}$ とおくと $G_0 \cap \overline{F'} = \phi$

さて、T は (A) をもち、$X_T(F)^\perp$ は T の reducing subspace だから $T|X_T(F)^\perp$ も (A) をもつ。ここで、$G_1 = \{\lambda : |\lambda - \lambda_0| > \frac{\varepsilon}{2}\}$ とおくと、$\{G_0, G_1\}$ は $\sigma(T)$ の open covering になるから、

$\exists F_0 \subset G_0$, $\exists F_1 \subset G_1$ closed sets

$$H = \overline{X_T(F_0) + X_T(F_1)}$$

ここで、$X_T(F)^\perp$ への orthogonal projection を P とおくと

$$PH = X_T(F)^\perp = P\overline{X_T(F_0)+X_T(F_1)} \subset \overline{PX_T(F_0)+PX_T(F_1)}$$
$$= \overline{X_{T|X_T(F)^\perp}(F_0) + X_{T|X_T(F)^\perp}(F_1)}$$

さて，$F_0 \subset G_0 \subset F$ だから，${}^\forall y \in X_{T|X_T(F)^\perp}(F_0)$ は

$$\sigma_T(y) = \sigma_{T|X_T(F)^\perp}(y) \subset F_0 \subset F$$

$$\therefore y \in X_T(F) \cap X_T(F)^\perp \quad \therefore y = 0$$

$$\therefore X_{T|X_T(F)^\perp}(F_0) = \{0\} \quad \therefore X_T(F)^\perp = X_{T|X_T(F)^\perp}(F_1)$$

よって $\sigma(T|X_T(F)^\perp) \subset F_1 \subset G_1$。これは，$\lambda_0 \notin G_1$，$\lambda_0 \in \sigma(T|X_T(F)^\perp)$ に反する。$\therefore \sigma(T|X_T(F)^\perp) \subset \overline{F'}$

次に，$H = X_T(F) \oplus \overline{X_T(F')}$ ${}^\forall F \subset \mathbb{C}$ closed

を示そう。lemma 2.3と同様にして，$X_T(F) \perp X_T(F')$，

よって $X_T(F) \subset X_T(F')^\perp$ がわかる。また，前に示したことから，$\sigma(T|X_T(F)^\perp) \subset \overline{F'}$ $\therefore X_T(F)^\perp \subset X_T(\overline{F'})$

よって，$G \supset F$ open を任意にとるとこのことから，

$$X_T(\overline{G})^\perp \subset X_T(\overline{G'}) \subset X_T(F')$$

$(\because F \subset G \subset \overline{G}$，$\therefore F' \supset G' \supset \overline{G}'$ $\therefore \overline{G'} \subset \overline{G'} = G' \subset F')$

$$\therefore X_T(\overline{G}) \supset X_T(F')^\perp \quad \therefore X_T(F) = \bigcap_{G \supset F} X_T(\overline{G}) \supset X_T(F')^\perp$$

よって，$X_T(F) \perp X_T(F')$ とあわせて，

$$X_T(F) = X_T(F')^\perp \quad \therefore X_T(F)^\perp = \overline{X_T(F')}$$

以下は，Th 2.2 の証明とまったく同様なので略する。

Cor. 2.9

$T \in B(H)$ が 条件(A)，(C)，(I)をみたし，

$H = X_T(F) \oplus \overline{X_T(F')}$ $\forall F \subset \mathbb{C}$ closed をみたすなら
Tは spectral operator with normal scalar part.

注 Radjabalipour [3] は, $T \in B(H)$ が(C) をもてば, (A) をもつことを示したので, 上の Cor 2.9 では, 条件(A) を除いてよい。また, 今まで使った decomposable の性質は 2-decomposable, つまり $\forall \{G_1, G_2\}$ open covering of $\sigma(T)$.. でおきかえられるが, 2-decomposable operator は decomposable operator であることが知られている。しかし, 2-quasi-decomposable operator が quasidecomposable operator かどうかは, また知られていない。Radjabalipour [4]。

参照

[1] E. Albrecht, An example of a weakly decomposable operator which is not decomposable, Rev. Roum. Pures Appl 20 (1975) 855～861

[2] A. A. Jafarian, On reductive operators, Indiana Univ. Math. J. 23 (1974) 607～613

[3] M. Radjabalipour, On subnormal operators, Trans. Amer. Math. Soc. 211 (1975) 377～389

[4] ——————, On equivalence of decomposable and 2-decomposable operators, Pac. J. Math 77 (1978) 243～247

[5] B. L. Wadhwa, Decomposable and Spectral operators on a Hilbert space, Proc. Amer. Math. Soc. 40 (1973) 112 ~ 114

[6] ————————, A note on reductive operators, Acta Sci. Math., 38 (1976) 187 ~ 189