

有限 Chevalley 群の Bruhat 分解と
unipotent elements について

阪大 理 川中宣明

K を元数体の有限体, G を K に係数をもつ有限 Chevalley 群とする。簡単のために, 以下 G を *untwisted* と仮定するが一般の *quasi-simple groups of Lie type* に対しても同様の議論が展開できる。次のような G の二種類の分解を考える:

$$(1) \quad G = \bigcup_{w \in W} B w B \quad (\text{Bruhat 分解}),$$

$$(2) \quad G = \bigcup_{s \in S} G^s,$$

ここに, B, W はそれぞれ G の Borel subgroup および Weyl group で S は G の *semisimple conjugacy classes* 全体, G^s は *semisimple part* の *conjugacy class* から成るような G の元全体を意味する。(1), (2) というふたつの分解 (ともに *disjoint*) は, 全く系統が違ってもかかわらずお互に密接に関係していることが少し実験をしてみるとわかる。ここでは, その方向への第一歩として G^1 (= G の *unipotent elements* 全体) と Bruhat 分解 (1) との関連を考える。

§ 1. Hecke algebra $H_c(G, B)$ (復習)

本節の内容は, N. Iwahori : On the structure of a Hecke ring of a Chevalley group over a finite field, J. Fac. Sci. Tokyo Univ. 10 (1964) からの引用. G の B についての Hecke algebra $H_c(G, B)$ は, G 上の複素数値関数 f で

$$f(bg b') = f(g) \quad (g \in G; b, b' \in B)$$

を満たすもの全体のなす vector space に convolution による積 :

$$(f_1 * f_2)(g) = |B|^{-1} \sum_{x \in G} f_1(gx^{-1}) f_2(x)$$

を入れたものとして定義された. 言いかえりと G の群環 $\mathbb{C}G$ の subalgebra $e(\mathbb{C}G)e$, ここに $e = |B|^{-1} \sum_{b \in B} b$, である. permutation representation 1_B^G の commuting algebra として定義することもできる. $w \in W$ に対して, $B^w B$ の characteristic function を $S(w)$ と書くことにする. これらは $H_c(G, B)$ の vector space としての base をなす. $\{w_i\}_{i=1}^l$ を W の simple reflections の全体とし, $1 = S(1)$, $S_i = S(w_i)$ ($i=1, 2, \dots, l$) とおくと $\{1, S_1, S_2, \dots, S_l\}$ は algebra $H_c(G, B)$ を生成する. $H_c(G, B)$ 内の積は次式を満たす:

$$(3) \begin{cases} S(w_i) S(w) = S(w_i w) & (l(w_i w) > l(w) \text{ のとき}) \\ S_i^2 = q \cdot 1 + (q-1) S_i & (i=1, 2, \dots, l), \end{cases}$$

但し, $l(w)$ は $w = \{s_{i_1} \dots s_{i_l}\}$ による w の最短表示の長さである。
 $H_c(G, B)$ が, 次式で定義される involutive automorphism $\hat{\sigma}$ を持つことも知られている:

$$(3) \quad \hat{\sigma}_i = (q-1)1 - S_i = -q S_i^{-1}$$

(従って, $\hat{\sigma}(w) = (-1)^{l(w)} q^{l(w)} S^{(w^{-1})^{-1}}$.)

§2. polynomials $F_{w, w^{-1}}(t)$

定理1. w, w^{-1} を Weyl 群 W の任意の元, $\hat{\sigma}(w)$ を §1 で定義した $H_c(G, B)$ の元とする, 次のような polynomials $F_{w, w^{-1}}(t)$ が (たゞ $w \neq 1$) 存在する:

$$(4) \quad \hat{\sigma}(w) = \sum_{w' \in W} F_{w, w'}(q) S^{(w')^{-1}} \quad (q = |K|)$$

とくに, w の w^{-1} の reduced decomposition を $S(w) = (s_{i_1}, s_{i_2}, \dots, s_{i_m})$ ($m = l(w)$, s_{i_j} は simple reflections) とすると $F_{w, 1}(t)$ は次式で与えられる。

$$(5) \quad F_{w, 1}(t) = \sum_{\vec{i} \in I_{S(w)}} t^{l(\vec{i})/2} (t-1)^{l(w) - l(\vec{i})}$$

ここに, $I_{S(w)}$ は, 次の条件 (a) (b) (c) を満たすような数列 $\vec{i} = (i_0, i_1, i_2, \dots, i_r)$ の全体とする:

- (a) $0 = i_0 < i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq m = l(w)$,
 (b) $s_{i_0} s_{i_1} \dots s_{i_r} = 1$ (但し $s_{i_0} = 1$ としておく),

$$(c) \quad l(s_{i_0} s_{i_1} \cdots s_{i_k}) < l(s_{i_0} s_{i_1} \cdots s_{i_k} s_r)$$

$$i_k + 1 \leq r \leq i_{k+1} - 1, \quad h = 0, 1, 2, \dots, k-1.$$

また, $I_{S(w)} \Rightarrow \bar{i} = (\bar{i}_0, \bar{i}_1, \dots, \bar{i}_k)$ に対して $l(\bar{i}) = k$ とおく. \lrcorner

注意 1. $l(\bar{i})$ は偶数または 0 ($\bar{i} \in I_{S(w)}$).

注意 2. $F_{w,1}(t)$ の degree は $l(w)$. $F_{w,1}(t)$ は符号を除いて自己相反的, 即ち t^p の係数を $b_p(w)$ と書くと,
 $b_p(w) = (-1)^{l(w)-p} b_{l(w)-p}(w)$ ($p = 0, 1, 2, \dots, l(w)$).
 他の polynomials $F_{w,w}(t)$ も符号を除いて自己相反的. \lrcorner

例 1. w が Coxeter element of W なら $F_{w,1}(t) = (t-1)^l$ (l は simple roots の個数).

2. W を G_2 型. w を W の長さ最大の元とすると,

$$F_{w,1}(t) = t^6 - 2t^5 + 2t^4 - 2t^3 + 2t^2 - 2t + 1.$$

3. W を A_3 型. w を W の長さ最大の元とすると,

$$F_{w,1}(t) = t^6 - 3t^5 + 4t^4 - 4t^3 + 4t^2 - 3t + 1. \quad \lrcorner$$

§3. G の unipotent elements

U を B の maximal unipotent subgroup. w_u を W の長さ最大の元とする.

定理 2. w を W の任意の元とし $S(w) = (s_1, s_2, \dots, s_m)$ を w の u と v の reduced expression とすりと,

$$(6) \quad B^u B \cap w_L \cup w_L^{-1} = \bigcup_{\bar{i} \in I_S(w)} \mathcal{U}_w(\bar{i}) \quad (\text{disjoint})$$

ここに, $I_S(w)$ は定理 1 において定義した通りとし, $\mathcal{U}_w(\bar{i})$ ($\bar{i} = (i_0, i_1, i_2, \dots, i_k)$) は次のような $x \in w_L \cup w_L^{-1}$ の全体とする:

$$(7) \quad x = g_1 g_2 \dots g_m \quad (m = l(w))$$

但し, $g_j = x_{-\alpha_j}(t)$, $t \in K^\times$; $j \notin \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$.

$$g_j = s_j x_{\alpha_j}(t), \quad t \in K; \quad j \in \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$$

$$\text{かつ } l(s_{i_0} s_{i_1} \dots s_{i_{p-1}}) < l(s_{i_0} s_{i_1} \dots s_{i_p}) \quad (j = i_p),$$

$$g_j = s_j; \quad j \in \{i_1, i_2, \dots, i_k\} \text{ かつ}$$

$$l(s_{i_0} s_{i_1} \dots s_{i_{p-1}}) > l(s_{i_0} s_{i_1} \dots s_{i_p}) \quad (j = i_p).$$

(α_j は simple reflection s_j に対応する simple root $x_{\alpha_j}(t)$ 等は, それに対応する root subgroup.)

(b) $\mathcal{U}_w(\bar{i})$ の元に対する表示 (7) は unique. 従って

$$(8) \quad |B^u B \cap w_L \cup w_L^{-1}| = F_{w,1}(t) \quad \lrcorner$$

系. $\sum_{w \in W} F_{w,1}(t) = t^N$, 但し $N = l(w_L) = \#$ of positive roots の個数. \lrcorner

予想 1. 定理 2(b) は次のように一般化できるであろう：
 w_1 と w_2 を W の任意の二元とすると，

$$|\{Bw_1B \cap w_2Bw_2Bw_2^{-1} \text{ 内の unipotent elements}\}| \\ = F_{w_1,1}(\rho) \cdot F_{w_2,1}(\rho).$$

(定理 2(b) は $w_2 = 1$ なる特別の場合) \lrcorner

G の任意の unipotent element は (U に conjugate な) ある maximal unipotent subgroup に含まれる。 G の Bruhat 分解 (1) と $N_G(U) = B \ltimes U$ に conjugate な subgroup は $uw'Uw'^{-1}$ ($u \in U, w' \in W$) と書ける。 $BwB \cap uw'Uw'^{-1}$ は次の簡単な補題と定理 2 からわかる。

補題 1. $BwB \cap uw'Uw'^{-1}$

$$= (BwB \cap uw_2Uw_2^{-1} \cap uw'Uw'^{-1}) \cdot (U \cap uw'Uw'^{-1})$$

かつ，右辺の形への分解は unique. \lrcorner

定理 2 と補題 1. を用いて次のことを証明することができ
 了。

定理 3. w を W の任意の元とする。 BwB に含まれる unipotent elements の個数は $q^N F_{w,1}(\rho)$ である。ここに， N は G の positive roots の個数. \lrcorner

定理2の系とあわせると, G の Bruhat 分解より,

系. G の unipotent elements の個数は, q^{2N} \square

この事実は, R. Steinberg が "Endomorphisms of linear algebraic groups" (Memoirs of the A.M.S., 1968) において Steinberg character の値を用いて証明している. なお, この節の終りの部分で系の簡明な interpretation を与える.

定理3は次のように一般化できる.

定理4. $B' = w_1 B w_1^{-1}$ (即ち B に opposite な Borel subgroup) とおき, $P \in B$ を含む parabolic subgroup, $P' \in B'$ を含む P に opposite な parabolic subgroup, U_P および $w_1 U_{P'} w_1^{-1} \in P$ と P' の unipotent radical とする. G の subset X 内の unipotent elements 全体の集合を $V(X)$ と書くことにすると, Weyl 群 W の任意の元 w, w_1 に対して,

$$(9) \quad q^{\nu(P, w_1)} |V(w_1 P w_1^{-1} \cap B w B)| \\ = q^{\nu(P', w_1) + N(P)} \sum_{w \in W} F_{w, w^{-1}}(q) |V(w_1 U_{P'} w_1^{-1} \cap B w B)|$$

および w

$$(10) \quad q^{\nu(P, w_1) + N(P)} |V(w_1 U_P w_1^{-1} \cap B w B)| \\ = q^{\nu(P', w_1)} \sum_{w \in W} F_{w, w^{-1}}(q) |V(w_1 P' w_1^{-1} \cap B w B)|$$

が成立する. 但し $N(P) (= N(P'))$ は P の reductive part の positive roots の個数で $\nu(P, w_1)$ 等は, $q^{\nu(P, w_1)} = |w_1^{-1} U_w \cap P| \times |U|$ (U は B の unipotent radical) で定義される nonnegative

integers である。』

'opposite' という言葉については, Borel-Tits: I.H.E.S. 1965, 参照.

とくに $P = G$ なら $P' = G$, $U_P = U_{P'} = \{e\}$, $N(P) = N(P') = N$
 $n(P, w_i) = n(P', w_i) = 1$ で, 定理 4 の (9) は定理 3 と同じになる
 ($w_i U_{P'} w_i^{-1} \cap B w' B = \phi$ となることに注意).

この節の残りの部分では Hecke algebra とは関係がないが,
 上記諸定理と同様の考察から導かれたいくつかの結果を述べる
 ことにする. まず定理 2 と補題 1 から次のことが証明できる:

定理 5. (a) $B w B$ の中に含まれる regular unipotent elements
 の個数は $q^{N-2+2l(w)} (q-1)^l$. ここで, l は simple roots の個数.
 (b) 従って G 内の任意の右 (又は左) B -剰余類は, すべて同
 じ個数 ($= q^{N-2} (q-1)^l$) の regular unipotent elements を
 含んでいる。』

regular unipotent elements の定義等については, Springer
 -Steinberg: Conjugacy classes (Seminar on alg. gr. and
 related finite gr., Springer, 1970 の Part E) を参照.

定理 3 と同様の証明で次のことがわかる.

定理 6. (a) G を K 上定義された connected semisimple (or reductive) linear algebraic group とし, $V = V(G)$ を G の unipotent elements 全体のなす variety とする (V が K 上定義されていることは知られている). 次のような K -subvarieties V_i ,

K -isomorphisms φ_i (as varieties) が存在する:

$$V = \bigcup_i V_i \quad (\text{有限個の } V_i \text{ の disjoint union})$$

$$\varphi_i: V_i \longrightarrow A^{2N} = 2N \text{次元 affine space}$$

$$A^{2N} = \bigcup_i \varphi_i(V_i) \quad (\text{disjoint union}).$$

(b) 従って V の K -rational points の個数は q^{2N} . \perp

定理 7. (a) G を定理 6 の通りとし, \mathfrak{g} をその Lie algebra とする. \mathfrak{g} の nilpotent elements 全体のなす K -variety を V と書くと, 上と同様に K -subvarieties V_i , K -isomorphisms φ_i が存在して,

$$V = \bigcup_i V_i \quad (\text{disjoint}), \quad \varphi_i: V_i \longrightarrow A^{2N}$$

$$A^{2N} = \bigcup_i \varphi_i(V_i) \quad (\text{disjoint}).$$

とすることができ.

(b) とくた, V の K -rational points の個数は q^{2N} . \perp

定理 6 は定理 3 系の interpretation を与える. 定理 7 (b) は, Steinberg-Springer の上で引用した論文では, K の標数 p が "good" の時に証明してある. 定理 6, 7 は, そこで出されてきた問題への解答である.

§4. character theory との関連

§1 で述べたように Hecke algebra $H_c(G, B)$ は G の群環 $\mathbb{C}G$ の subalgebra $e(\mathbb{C}G)e$ ($e = |B|^{-1} \sum_{b \in B} b$) と同一視できる. permutation representation 1_B^G の (必ずしも既約でない) constituents は, すべて $H_c(G, B) = e(\mathbb{C}G)e$ 内の左 ideal として実現される. $H_c(G, B)$ の involutive automorphism \wedge (§1 参照) は, irreducible constituent を irreducible constituent にうつす. とくに $(1_G^G)^\wedge = St_G$, また $P \in$ parabolic subgroup とすると $(1_P^G)^\wedge = St_{P^G}$, ここに St_{P^G} は P の Steinberg character (P の reductive part の Steinberg character を unipotent radical の上では trivial になるよう拡張したもの) である.

$A(G)$ を G 上の complex valued class functions の全体とし, \mathbb{C} -linear map $f: H_c(G, B) \rightarrow A(G)$ を次式によって定義する:

$$(11) \quad [f(S(w))](g) = \frac{|BwB \cap \mathcal{C}(g)|}{|\mathcal{C}(g)|} \quad (w \in W, g \in G)$$

但し, $\mathcal{C}(g)$ は G における g の共役類.

定理3 と 定理4 から 次のことが, 証明できる.

定理8. 任意の $f \in H_c(G, B)$ と parabolic subgroup P に対し,

$$(12) \quad \sum_u [f(\tilde{z})](u) [1_P^G](u) = \sum_u [f(\tilde{z})](u) [St_P](u),$$

とくに $P = G$ のとき,

$$(12') \quad \sum_u [f(\frac{1}{3})](u) = \mathfrak{q}^N [f(\frac{1}{3})](1),$$

但し, $\text{sum } \sum_u$ は G の unipotent elements 全体にわたるものとする. \perp

1_B^G に含まれる irreducible characters は f による像の中に入り、ていよことが、一般論からわかるので、定理 8 から次のことがわかる。

定理 9. $\chi \in 1_B^G$ に含まれる irreducible character とすると, (13) $\sum_u \chi(u) [1_P^G](u) = \sum_u \hat{\chi}(u) [St.P^G](u)$ とくに $P = G$ のとき,

$$(13') \quad \sum_u \chi(u) = \mathfrak{q}^N \cdot \hat{\chi}(1) . \perp$$

注意 3. (13') において $\chi = 1_G$ とすると $\hat{\chi} = St.$ の次元は \mathfrak{q}^N だから, (13') はこの場合, 定理 3 の系と同じことを言っていることになる。

注意 4. (13) において $P = B$ とした式が次式かである:

$$\sum_{x \in t} \chi(x) [1_B^G](x) = \sum_{x \in t} \hat{\chi}(x) [1_B^G](x),$$

ここに, t は fix された semisimple conjugacy class of G で両辺の和は, semisimple part の conjugacy class が t であるような G の元全体にわたる. 同様な式が B 以外の parabolic

subgroup に対しても成立するはずである。次のより強い予想にも相当の信頼性があると思う。

予想 2. χ_1, χ_2 を 1_G に含まれる (既約) 指標とし、 t を G の任意の semisimple conjugacy class とすると、

$$(14) \quad \sum_{x \in t} \chi_1(x) \chi_2(x) = \sum_{x \in t} \hat{\chi}_1(x) \hat{\chi}_2(x) \quad \square$$

定理 9 は (14) の $t=1$ の場合のそのまた特殊な場合に過ぎない。一般の t の場合の証明には新しいアイデアが必要である。

注意 5. I. G. Macdonald は、(13') と似た式：

$$(15) \quad \sum_u \chi(u) = (\# \text{ of } u \neq 1) \times \chi(1)$$

が、 G のすべての既約指標に対して成立することを予想した。 1_G に含まれる既約指標のうち $\chi(1)$ と $\hat{\chi}(1)$ がわかってゐる場合には (13') を用いて (15) が正しいことを確かめることができる。

注意 6. $G = GL_n(K)$ のときは、J. A. Green の結果 (Trans. A.M.S., 80, 1955) を使うと $\chi \rightarrow \hat{\chi}$ なる対応が (必ずしも 1_G に含まれない) 任意の既約指標に対して自然に定義できて (14) が成立することがわかる。但しこのとき、 χ が既約なら $\hat{\chi}$ は既約指標又はその (-1) 倍である。同様のことが一般の有限 Chevalley 群にまで拡張できるかもしれない。

最後に、定理5を用いて、

定理10. χ を 1_G に含まれるような G の nontrivial な irreducible character とすると、

$$\sum_{u \in G_r^1} \chi(u) = 0,$$

但し G_r^1 は、 G 内の regular unipotent elements 全体とする。』

(実際には、任意の regular unipotent element u に対して $\chi(u) = 0$ となるのではないかと思うが、まだ考えていない。)

今の所、序で述べた分解 $G = \bigcup_{g \in G} G^g$ と Bruhat 分解との間に何故関係があるのか、少しもわかんないがこの方面を掘り下げていくことは G の character や conjugacy class を理解する上で重要な意味を持つのではないかと思う。

以上