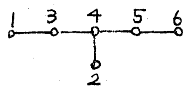
数理解析研究所講究録
200 巻 1974 年 81-84

(E_6)型単連結有限 Chevalley 群の共役類について

東大　理　　水野　賢三

G, $\bar{G}$ をそれぞれ標数 p の有限体 F_q とその代数閉包 K 上の (E_6) 型単連結 Chevalley 群, $\bar{H}, \bar{U}, W, \Sigma$(ルート系), Π(基底) 等記号については〔1〕に準ずるものとする。特に, $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$ を図形が



となる様に定める。H, U を $\bar{H}, \bar{U}$ に対応する G の部分群とする。ここでは共役類を決定する方法について述べることは止め, 結果のみを記す。

p'-元については次の結果がある。

定理(〔2〕)　G の p' 元の共役類と $(\bar{H}/W)_\sigma$ (σ は $\bar{G}$ の Frobenius 同型) の元とは1対1に対応し, $\Gamma(w, S) = \{h \in \bar{H} \mid w(h) = \sigma(h),\ Z_W(h) = W_S\}$ ($S \subsetneq \Pi \cup \{$最低ルート$\}$, $w \in W$ s.t. $w(S) = S$) の元に対応する G の共役類の元 h に対し

$$Z_G(h) \cong \bar{H}(w) \langle \bar{\mathfrak{X}}_{\pm S} \rangle_{\sigma^{-1}w}$$

となる。ここで $\bar{H}(w) = \{m \in \bar{H} \mid w(m) = \sigma(m)\}$ とする。

この定理に従って各 $\Gamma(w, S)$ に対応する共役類の数を決定したが, 常に $\Gamma(w_{1234}\, w_{2456}\, w_{3456}\, w_{12344556}, \{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_2, $最低ルート$\}) = \phi$ であ

った。

p 元の代表系とその中心化群の位数は次の通りである。

$\chi_1(1)$	$(q^6-1)(q^5-1)(q^4-1)(q^3-1)(q^2-1)q^{36}$	$\chi_1(1)\chi_3(1)\chi_5(1)\chi_6(1)\chi_2(1)\chi_{1234456}(1)\chi_{8-\alpha_2}(\tau)$	
$\chi_1(1)\chi_3(1)$	$2(q^3-1)^2(q^2-1)^2q^{26}$	(但し $(3,q-1)=1$)	$3(q^2+q+1)q^{18}$
$\chi_1(1)\chi_4(1)\chi_6(1)\chi_8(\zeta)$	$2(q^6-1)(q^4-1)q^{26}$	$\chi_1(1)\chi_3(1)\chi_5(1)\chi_6(1)\chi_{-8}(\lambda)\chi_2(1)$,	$3(q^2+q+1)q^{18}$
$\chi_2(1)\chi_3(1)\chi_5(1)\chi_{245}(1)\chi_{23445}(\eta)$	$2(q^6-1)(q^4-1)q^{26}$	$\chi_1(1)\chi_3(1)\chi_4(1)\chi_5(1)\chi_6(1)$	$(3,q-1)(q^2-1)q^{12}$
$\chi_1(1)\chi_4(1)$	$(q^6-1)(q^4-1)(q^2-1)(q-1)q^{33}$	$\chi_1(1)\chi_3(1)\chi_4(1)\chi_5(1)\chi_6(\lambda)$	$3(q^2-1)q^{12}$
$\chi_1(1)\chi_3(1)\chi_4(1)$	$(q^4-1)(q^2-1)(q-1)q^{19}$	$\chi_1(1)\chi_3(1)\chi_4(1)\chi_5(1)\chi_6(\lambda^2)$	$3(q^2-1)q^{12}$
$\chi_1(1)\chi_3(1)\chi_5(1)$	$(q^3-1)(q^2-1)(q-1)q^{26}$	$\chi_1(1)\chi_3(1)\chi_4(1)\chi_2(1)\chi_6(1)$	$(q-1)q^{15}$
$\chi_1(1)\chi_4(1)\chi_6(1)$	$(q^3-1)(q^2-1)^2q^{31}$	$\chi_1(1)\chi_3(1)\chi_5(1)\chi_6(1)\chi_2(1)$	$(3,q-1)(q^2-1)q^{22}$
$\chi_1(1)\chi_3(1)\chi_4(1)\chi_5(1)$	$(q^2-1)(q-1)q^{15}$	$\chi_1(1)\chi_3(1)\chi_5(1)\chi_6(\lambda)\chi_2(1)$	$3(q^2-1)q^{22}$
$\chi_1(1)\chi_3(1)\chi_4(1)\chi_6(1)$	$(q^2-1)(q-1)q^{19}$	$\chi_1(1)\chi_3(1)\chi_5(1)\chi_6(\lambda^2)\chi_2(1)$	$3(q^2-1)q^{22}$
$\chi_1(1)\chi_3(1)\chi_5(1)\chi_6(1)$	$(3,q-1)(q^6-1)(q^2-1)q^{22}$	$\chi_6(1)\chi_5(1)\chi_4(1)\chi_3(1)\chi_2(1)$	$(2,p)(q-1)q^9$
$\chi_1(1)\chi_3(1)\chi_5(1)\chi_6(\lambda)$	$3(q^6-1)(q^2-1)q^{22}$	$\chi_6(1)\chi_5(1)\chi_4(1)\chi_3(1)\chi_2(1)\chi_{345}(\eta)$	$2(q-1)q^9$
$\chi_1(1)\chi_3(1)\chi_5(1)\chi_6(\lambda^2)$	$3(q^6-1)(q^2-1)q^{22}$	$\chi_2(1)\chi_3(1)\chi_4(1)\chi_5(1)\chi_{134}(1)$	$(q-1)q^{13}$
$\chi_1(1)\chi_3(1)\chi_2(1)\chi_5(1)$	$(q^2-1)(q-1)q^{25}$	$\chi_1(1)\chi_3(1)\chi_4(1)\chi_5(1)\chi_6(1)\chi_8(\zeta)$	$2(3,q-1)q^{12}$
$\chi_2(1)\chi_3(1)\chi_4(1)\chi_5(1)$	$(2,p)(q^3-1)(q^2-1)q^{13}$	$\chi_1(1)\chi_3(1)\chi_4(1)\chi_5(1)\chi_6(\lambda)\chi_8(\lambda\zeta)$	$6q^{12}$
$\chi_2(1)\chi_3(1)\chi_4(1)\chi_5(1)\chi_{245}(\eta)$	$2(q^3-1)(q^2-1)q^{13}$	$\chi_1(1)\chi_3(1)\chi_4(1)\chi_5(1)\chi_6(\lambda^2)\chi_8(\lambda^2\zeta)$	$6q^{12}$
$\chi_2(1)\chi_3(1)\chi_4(1)\chi_{245}(1)$	$6(q-1)^2q^{18}$	$\chi_{13}(1)\chi_{24}(1)\chi_{56}(1)\chi_{34}(1)\chi_{45}(1)\chi_{234}(1)\chi_{2345}(\eta)$,	$2(q-1,3)q^{12}$
$\chi_1(1)\chi_3(1)\chi_4(1)\chi_6(1)\chi_{-8}(\zeta)$	$2(q^2-1)q^{18}$	$\chi_{13}(1)\chi_{24}(1)\chi_{56}(1)\chi_{34}(1)\chi_{45}(\lambda)\chi_{234}(1)\chi_{2345}(\lambda\eta)$,	$6q^{12}$
$\chi_1(1)\chi_2(1)\chi_4(1)\chi_5(1)\chi_{1345}(1)\chi_{1233445}(\eta)$,	$2(q^2-1)q^{18}$	$\chi_{13}(1)\chi_{24}(1)\chi_{56}(1)\chi_{34}(1)\chi_{45}(\lambda^2)\chi_{234}(1)\chi_{2345}(\lambda^2\eta)$,	$6q^{12}$

$x_{13}(1)x_{24}(1)x_{56}(1)x_{34}(1)x_{45}(1)x_{345}(1)$ $\quad 2(3,q-1)q^{12}$

$x_{13}(1)x_{24}(1)x_{56}(1)x_{34}(1)x_{45}(\lambda)x_{345}(1)$ $\quad 6q^{12}$

$x_{13}(1)x_{24}(1)x_{56}(1)x_{34}(1)x_{45}(\lambda^2)x_{345}(1)$ $\quad 6q^{12}$

$x_{2}(1)x_{4}(1)x_{5}(1)x_{6}(1)x_{13}(1)x_{345}(1)$ $\quad (3,q-1)q^{8}$

$x_{2}(1)x_{4}(1)x_{5}(1)x_{6}(1)x_{13}(1)x_{345}(\lambda)$ $\quad 3q^{8}$

$x_{2}(1)x_{4}(1)x_{5}(1)x_{6}(1)x_{13}(1)x_{345}(\lambda^2)$ $\quad 3q^{8}$

$x_{1}(1)x_{2}(1)x_{3}(1)x_{4}(1)x_{5}(1)x_{6}(1)$ $\quad (2,p)(3,p)(3,q-1)q^{6}$

$x_{1}(1)x_{2}(1)x_{3}(1)x_{4}(1)x_{5}(1)x_{6}(1)x_{2345}(\tau)$

(但し $p=3$) $\quad 3q^{6}$

$x_{1}(1)x_{2}(1)x_{3}(1)x_{4}(1)x_{5}(1)x_{6}(1)x_{2345}(-\tau)$

(但し $p=3$) $\quad 3q^{6}$

$x_{1}(1)x_{2}(1)x_{3}(1)x_{4}(1)x_{5}(1)x_{6}(1)x_{234}(\eta)$ $\quad 2(3,q-1)q^{6}$

$x_{1}(1)x_{2}(1)x_{3}(1)x_{4}(1)x_{5}(\lambda)x_{6}(1)$ $\quad 3(2,p)q^{6}$

$x_{1}(1)x_{2}(1)x_{3}(1)x_{4}(1)x_{5}(\lambda^2)x_{6}(1)$ $\quad 3(2,p)q^{6}$

$x_{1}(1)x_{2}(1)x_{3}(1)x_{4}(1)x_{5}(\lambda)x_{6}(1)x_{234}(\eta)$ $\quad 6q^{6}$

$x_{1}(1)x_{2}(1)x_{3}(1)x_{4}(1)x_{5}(\lambda^2)x_{6}(1)x_{234}(\eta)$ $\quad 6q^{6}$

記号について

$x_{i_1\cdots i_k}(t) = x_{\alpha_{i_1}+\alpha_{i_2}+\cdots+\alpha_{i_k}}(t)$, δ：最高ルート

η：F_q^* $(p=2)$ の元で $X^2+X+\eta$ が F_q 上既約多項式となる元の1つ。

τ：F_q^* の元で $X^3-X+\tau$ が F_q 上の既約多項式となる元の1つ

λ：F_q^* の非立方元の1つ。（特に $(3,q-1)=3$）

ζ：F_q^* の非平方元の1つ。（特に $p\neq 2$）

p 元の中心化群の構造も比較的容易に得られる。G に於ては、p-元の共役類の個数は標数と無関係に一定であり 20 個である。F_4 型については、$p=2$ の時が 19 個、$p\neq 2$ の時は 15 個、G_2 型については $p=3$ の時が 5 個、$p\neq 3$ の時には 4 個であるこ

とにより、一般に、代数閉体上の Chevalley 群の unipotent class の数は、標数がルートの長さの２乗の比と異なる時には一定で体の取り方に寄らない様に思われる。（[3], [4], [5], [6]）

参照

1. R. Steinberg : Lecture on Chevalley groups. Yale Univ (1967)
2. 〃 : Endomorphisms of Linear Algebraic Groups. Menoir 80. A.M.S. (1968)
3. B. Chang : The Conjugacy classes of Chevalley groups of type (G_2). J. Alg 9 (1968)
4. H. Enomoto : The Conjugacy classes of Chevalley groups of type (G_2) over finite fields of char 2 or 3. J.F.S. Univ of Tokyo. (1970)
5. K. Shinoda : The Conjugacy classes of Chevalley groups of type (F_4) over finite fields of char 2. (to appear)
6. T. Schoji : The Conjugacy classes of Chevalley groups of type (F_4) over finite fields of char $\neq 2$. (to appear)