数理解析研究所講究録
200 巻 1974 年 72-75



# ある種の共役類について

埼玉大 教育 稲垣信夫

## §1 序

Avinoam Mann は On subgroups of Finite Groups II (J. Alg. 22. 1972. P233 - P240) の中で可解群 $G$ の部分群 $H$ と，$G$ の Sylow systems との間の関係づけに着目して種々の部分群を導入した。以下そこで導入された部分群を定義する。$\mathcal{S}$ を $G$ の Sylow system とするとき，$H \cap \mathcal{S}$ が $H$ の Sylow system となる場合に Sylow system $\mathcal{S}$ は $H$ の中で reducible という。$\mathcal{M}_0$ を $H$ の中で reducible な $G$ のすべての Sylow systems の集合とする。$G$ は共役を作る方法で $G$ のすべての Sylow systems 上で transitive であるが，上の $\mathcal{M}_0$ を含む最少の imprimitivity の集合を $\mathcal{M}$ とおき，これを $\mathcal{M}_0$ を含む最少の block とよぶことにする。そのとき $\mathcal{M}$ の stabilizer を $Q(H)$ とかく。$\mathcal{M}$ と $Q(H)$ の間には次の関係が知られている 即ち $\mathcal{M}$ は $Q(H)$ の中で reducible な $G$ のすべ

ての Sylow systems の集合である．また $\mathfrak{M}_0$ の stabilizer を $L(H)$ とかく

つぎに G の部分群 H と K が G の中で共役であるということを以下で定義する．すなわち H の中で reducible な G の Sylow systems の集合全体が K のそれと一致する場合である．この定義は R. Carter によっている．A. Mann はこの共役類の中に最大元が唯1つ存在することを示した．これを $M(H)$ とかく．そのとき上に定義した $L(H)$ は $N_G(M(H))$ である．

$Q(H)$ については A. Mann によって多くのことが知られているが，$M(H)$，$L(H)$ についてはあまりよく判っていない．

A. Mann は $\mathfrak{M}_0$ が block となるための必要十分条件を strong subnormalizer の存在定理でのべている．( System normalizers and subnormalizers. Proc. Lond. Math. Soc. (3) 20 (1970) P123 − P143 ) この小論では上の $M(H)$ を用いて別の型の必要十分条件をのべる．

§2. 定理について

定義　$G \supset H$ が G の中で abnormal とは $\langle H, H^g \rangle \ni g$

定義　$G \supset H$ が G の中で pronormal とは H と $H^g$ に対して $H^g = H^t$ となる適当な元 t が $\langle H, H^g \rangle$ の中にとれること．

定理　$G \supset H$, $\mathfrak{M}_0$ は上記のものとする．そのとき以下は同値である．

1° $\mathfrak{M}_0$ が block を作っている．

2° $M(H)$ は abnormal

3° $M(H)$ は pronormal

さらにこのとき　$L(H) = Q(H) = M(H) \supseteq H$.

証明の概略

$1° \to 2°$　$\mathfrak{M}_0$ が block を作っているとすると $\mathfrak{M}_0$ は $Q(H)$ の中で reducible な $G$ の Sylow systems の全体と一致するから $Q(H) \leq M(H)$. 一方 $Q(H) = \{g \mid \mathfrak{M}_0^g = \mathfrak{M}_0\} = L(H) \supseteq M(H)$ より $Q(H) = M(H)$ をうる．ところで $Q(H)$ が abnormal は知られているから $M(H)$ は abnormal となる．

$2° \to 3°$　abnormal なら pronormal は定義より明白．

$3° \to 1°$　$M(H)$ を pronormal とすれば　$M(H) \sim M(H)^g$ より　適切な $t$ が $<M(H), M(H)^g>$ の中より取れて $M(H)^t = M(H)^g$　をうるから　$g \in tN_G(M(H))$ よって $G = <M(H), M(H)^g> N_G(M(H))$　$G$ がこのような型に書ける事実より　A. Mann の定理が用いられて $N_G(M(H)) \supseteq Q(M(H))$ をうる．一方 $Q(M(H))$ の定義より $N_G(M(H)) \leq Q(M(H))$ であるから $N_G(M(H)) = Q(M(H))$ をうる．また $M(H)$ の定義より　$Q(M(H)) = Q(H)$ であるから $Q(H)$

i)

$\triangleright M(H)$ となる. ここで $Q(H)$ で reducible な Sylow system の集合を $\mathfrak{M}$ とすれば 上記より $\mathfrak{M}$ は $M(H)$ で reducible となるから $\mathfrak{M} \leq \mathfrak{M}_0$ 一方 $\mathfrak{M} \geq \mathfrak{M}_0$ より $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_0$ となつて block を作る.