数理解析研究所講究録
200巻 1974年 38-41

位数p^nのf.p.f.aを持つ群について

阪大 理 松山 広

§0

1960年代の初めに，次の様な予想が立てられた。

「$\mathrm{Aut}(G) \supseteq A$， $C_G(A)=1$， $|A| = p_1^{a_1}\cdots p_s^{a_s}$

$$\left\{\begin{array}{l} (|A|, |G|)=1 \\ \text{or } A=\text{cyclic} \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ $G=\text{solvable}$ かつ $\mathrm{nilp}(G) \leq \sum_{i=1}^{s} a_i$ 」

Thompson による Frobenius 予想の解決以来，Aに，具体的な形を与えた様々な結果が得られたが，一般的な解決には至っていない。例えば，Aが素数巾位数のcyclic群としても，"$n=1$"，"$p=2$ かつ $n=2$" 以外のCaseでは，Gの可解性は示されていない。しかし，Gを可解群とすると，nilpotent length の方は，Hoffman [1]，Shult [2]，Gross [3]により，"$p=2$ かつ GのSylow q-subgroupが nonabelian for some q = Mersenne prime $\in \pi(G)$" 以外のCaseでは，予想の正しいことが示されている。$A \cong Z_p \times \cdots \times Z_p$ のときは，Martineau [4]，[5]，[6]により，$A \cong Z_{rs}$ $(r \neq s)$ のときは，

Ralston[7]によりそれぞれGの可解性が示されている。

§1.

ここでは標題とは関係の無い次の事実と証明の概略を紹介する。

Prop.

イ) $\pi(G) \ni {}^\exists p_1, {}^\exists p_2, {}^\exists p_3$ = distinct primes such that

$\#\{Syl_{p_1}(G)\} = p_2$巾, $\#\{Syl_{p_i}(G)\}$ = 素数巾 i=1,2

$\Rightarrow {}^\exists j \in \{1,2,3\}$ st $\langle Syl_{p_j}(G) \rangle \lneq G$

ロ) $\#\{Syl_p(G)\}$ = 素数巾 for any $p \in \pi(G)$

$\Rightarrow G$ = solv.

証明の概略。

イ) $P_1 = S_{p_1}$ of G とする。$N = N_G(P_1)$ とおく。$N \neq G$ としてよい。

$P_2 = S_{p_2}$ of G とすると、仮定から、$G = NP_2$ と書ける。

${}^\exists P_3 = S_{p_3}$ of G st $P_3 \leq N$. もし、$\#\{Syl_{p_3}(G)\} \neq p_2$巾 なら

$P_3^G \trianglelefteq N$ より、よい。よって $\#\{Syl_{p_3}(G)\} = p_2$巾 としてよい。

$\#\{Syl_{p_2}(G)\} \neq p_i$巾 for some $i \in \{1,3\}$.

$\therefore N_G(P_2) \supseteq {}^\exists \hat{P_i} = S_{p_i}$ of G.

よって、$\hat{P_i}^G \subseteq N_G(P_2)$ よりよい。

ロ) $\#\{\pi(G)\} \geq 3$ by Burnside. 但し、G = minimal な反例。

イ)より、Proper normal subgp N がある。($N \neq 1$)

N と G/N がまた、仮定を満足することを示せばよい。

§2.

ここでは，$A \cong Z_{p^n}$ のとき，Gの構造が非常に制限されるであろうという予想を述べ，強い条件つきではあるが，その予想の正しいことを示す。（Aは§0のと同じ。）

[3]および[4]などから，次の様なことが自然に予想される。

予想1　$A = \langle \phi \rangle \cong Z_{p^n}$，$n=2$ or $p=\text{odd}$ ならば，

$G = F(G)\, C_G(\phi^{p^{n-1}})$ と書けるか？

Prop. 1.　(for any prime p)

$G/F(G)$ の Sylow q-subgroup $=$ abelian for $\forall q \in \pi(G)$

$\Rightarrow G = F(G)\, C_G(\phi^{p^{n-1}})$

Prop. 2.　$G = \text{solvable}$ とする。

$n=1, 2$ or $p=\text{odd}$ ならば，$G = F(G)\, C_G(\phi^{p^{n-1}})$

Cor. 3.　(Prop. 2と同じ仮定のもとに)

i) $[G, \phi^{p^{n-1}}] = \text{nilpotent}$

ii) $G = F_k(G)\, C_G(\phi^{p^{n-k}})$　$(k=1, \cdots, n)$　$F_k(G) =$ 第k Fitting

iii) $G^{(l(p))} = \text{nilpotent}$，if $n=2$.

但し，$l(p) = \text{Max}\{$位数pのf.p.f.aを持つ群の交換子群列の長さ$\}$

証明の概略および注意

Prop. 1 については“Scimeni [8]”や“Grün による Focal 群についての結果”を用いて容易に証明できる。Prop. 1 が $p=2$

でも成立することは、次の予想を導く。

予想「$A \simeq Z_{2^n}$, $\overline{G}$のSylow q-subsp. = abelian for any q = Mersenne prime $\in \pi(\overline{G})$, (但し, $\overline{G} = G/F(G)$).

ならば, $G = F(G)C_G(\Phi^{2^{n-1}})$ と書けるか?」

Prop 2は [3] を用いて, Prop I とほぼ同様にして証明できる. Cor 3は すべて明白だが, i) は, $C_G(\Phi^{p^{n-1}})$ が G の生成に関係しないとき, 即ち, $\Phi^{p^{n-1}}$ が G に疑似的に f.p.f. a として act すると, G = nilpotent になることを示している. また ii) では, $K = n$ とすると, $G = F_n(G)$ となり $nil_p(G) \leq n$ を示している. iii) は, Ward [9] を改良した結果になっている.

—終—

参考

[1] Hoffman Math. Z. 1964

[2] Shult Ill. Jour. Math 1965

[3] Gross Proc. A.M.S. 1966

[4] Martineau Math. Z. 1972

[5] 〃 Quart. J. Math 1972

[6] 〃 Math. Z. 1973

[7] Ralston Jour. of Alg. 1972

[8] Scimemi Jour. of Alg. 1968

[9] Ward, J. Austral. Math. Soc. 1969

(了)