

tight 4-design について

阪大大学院 加納幹雄

R. M. Wilson と D. K. Ray-Chaudhuri によつて Fisher の不等式の拡張である次の定理が証明された

定理 D を $2S-(v, k, \lambda)$ design とし

$$v \geq k+5 \quad \Rightarrow \quad b = \text{block の 数} \geq \binom{v}{5}$$

上式で等号の成り立つ design を tight 2S-design とし、以下 tight 4-design について

現在知られてゐる tight 4-design は自同群 $v-2-$
 $(v, v-2, 1)$ design と M_{23} を自己同型群としてもつ
 $4-(23, 7, 1)$ design (及 u = 其の complementary) を持つ
 である。これより自明でない tight 4-design は $4-(23, 7, 1)$
 に限り、のでは否かと思われた。

まず tight 4-design に関して上の両者による次の結果が基本的である

定理 D を $4-(v, k, \lambda)$ tight 4-design とすると

異なる 2 つの block の intersection number は 2 つ

あ、こ = ねは

$$X^2 - \left\{ \frac{2(k-1)(k-2)}{(r-3)} + 1 \right\} X + \lambda \left(2 + \frac{4}{k-3} \right) = 0$$

の 2 根である。

$$C_{0r} \quad k-3 \mid 4\lambda \quad (\text{及} \lambda=1 \rightarrow 4-(23.7.1))$$

= の定理により容易に、 $\lambda=1$ なる tight 4-design は 4-(23.7.1) に限ると、及 $\lambda=2 \leq \lambda \leq 10$ では自明で、tight 4-design は存在し、 $\lambda=11$ が確かめられる。

今 M_2, M_1 ($M_2 > M_1$) を異なる 2 つの block の intersection number とすると次の結果が得られた。

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{tight 4-design において} \\ 1. \quad M_2 - M_1 = 1 \quad \text{なり} \quad \text{自明なものである} \\ 2. \quad M_2 - M_1 = 2 \quad \text{なり} \quad 4-(23.7.1) \text{ design} \\ 3. \quad M_2 - M_1 = 3 \quad \text{なり} \quad \text{存在し} \\ 4. \quad \frac{k - M_2}{M_2 - M_1} \text{ は 整数} \end{array} \right.$$

4. は野田氏に教えてもらった、有力ではなにかと思われた結果

次に 1~4. の簡単な証明を述べる

1. $M_2 - M_1 = 1$ のときは

$$\mu_2 + \mu_1 = \frac{2(r-1)(r-2)}{(v-3)} + 1$$

$$\mu_2 - \mu_1 = \frac{r(r-1)^2(r-2)}{(v-2)(v-3)}$$

$$\therefore \lambda = \frac{1}{2} \frac{r(r-1)(r-2)(r-3)}{(v-2)(v-3)} \quad \text{より}$$

上の2式と合わせて

$$\{v - (r+1)\} \{v - (r+2)\} = 0 \quad \text{が得られるので } r < \frac{v}{2}$$

2.3 $\mu_2 - \mu_1 = a$ とおく. 又 $r < \frac{v}{2}$ としよるので

$$\frac{r(r-1)}{(v-2)} - \frac{(r-1)(r-2)}{(v-3)} < \frac{3}{4}$$

これと上の3つの式より

$$T = \frac{(r-1)(r-2)}{v-3} < a^2 - 1$$

又 $\lambda < \frac{T^2}{2}$ であり、これは後には Cor を用い、これは「より」が
逆向きの不等式も用い、な...と計算が大変である。

4. N を $v \times b$ 行列. A_1, A_2 を $b \times b$ 行列として

次のように定める. v 点 a_1, \dots, a_v , b 塊 B_1, \dots, B_b
で表わす

$$(N)_{ij} = \begin{cases} 1 & a_i \in B_j \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

$$(A_i)_{k,l} = \begin{cases} 1 & |B_k \cap B_l| = \mu_i \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

とおく

$${}^t N \cdot N = rI + \mu_1 A_1 + \mu_2 A_2$$

$$J = I + A_1 + A_2$$

$$A_1 A_2 = A_2 A_1 \quad \text{= これは 可換 関数}$$

= 本より A_1, A_2 の固有値を計算し、= 本が代数的整数であることに注意すればよい。

tight 4-design の決定には程遠いですが、= 本は興味ある問題だと思います

参 R. M. Wilson and D. K. Ray - Chaudhuri
ON t -designs (Generalization of Fisher's inequality)
to t -design

Amer Math Soc Notices 18 (1971) 805