

ある種の距離2の正則グラフの特徴づけ

阪大 理学部 沼田 稔

§ 1. 序

講演の時には、まだ完全には特徴づけされていなかったのですが、その後、予想に反した型で特徴づけが完成されたので訂正しておきます。

結果は次の通りです。

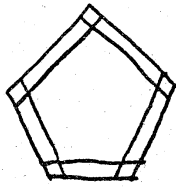
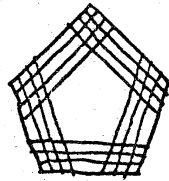
定理. 距離2の正則グラフ Γ が次の特徴をもっているとする。

- i) 結ばれている二点と共通に結ばれる点の数は一定である。
- ii) 互いに結ばれない三点が存在する。
- iii) 互いに結ばれない三点对し共通に結ばれる点には存在しない。

その時、グラフ Γ は次のいずれかである。

- 1) 次元2の Lattice グラフ
- 2) Triangle グラフ

- 3) 27点からなるグラフで *intersection matrix* は $B(16, 10, 8)$
- 4) $5 \cdot h^2$ ($h \geq 2$) 個の点からなる下の図のようなグラフである。このグラフは、2以上の任意の自然数 h に対し、唯一つ存在する。

 $h=2$ のグラフ $h=4$ のグラフ

点 は *line* の交点
 同じ *line* 上の点を
 結ぶ

2重可移でない有限置換群の自明でない *self paired orbit* から作ったグラフは、自明でない正則グラフでありしかも条件 i) を満たす。したがって *primitive rank 3* でなくとも、ある *self-paired orbit* から作られたグラフが距離 2 であり条件 ii) と iii) を満たせば、そのグラフは定理の条件をすべて満足しグラフは決定される。したがってもとの有限置換群もほぼ決定される。条件 ii) は多くの場合満足されるものであるから条件 iii) がこの定理のグラフの特徴づけにとって本質的なものである。しかしながら条件 ii) はこの定理の証明にはかかすことのできないものである。

1) から 4) までのグラフの特徴づけには定理の条件はどれも

必要であるが、もしもつと条件を弱くしてより多くのグラフを全体として特徴づけることが出来るならばすばらしいと思います。また条件を少し変形して特徴づけを考えることも出来るのではないかと思います。

§ 2. 定理の証明の概略

グラフ $\Gamma = (V, B)$ が定理の条件を満足しているとせよ。

$V \ni \alpha$ に対し、

$$\Delta(\alpha) = \{\beta \mid (\alpha, \beta) \in B\}, \quad \Gamma(\alpha) = V \setminus \Delta(\alpha) \setminus \{\alpha\}$$

と定義する。

$\Gamma(\alpha) \ni \gamma$, $\Delta(\alpha) \cap \Delta(\gamma) \ni \beta$ とすると、条件 iii) から

$$\Delta(\beta) = \{\Delta(\beta) \cap \Delta(\gamma)\} \cup \{\Delta(\beta) \cap \Delta(\alpha) \setminus \Delta(\gamma)\} \cup \{\alpha, \gamma\}.$$

正則であることと条件 i) を満すことから

$$|\Delta(\beta)| = k, \quad \cancel{\Delta(\alpha) \cap \beta} \quad |\Delta(\beta) \cap \Delta(\gamma)| = a \quad \text{とすると}$$

$$|\Delta(\beta) \cap \Delta(\alpha) \setminus \Delta(\gamma)| = k - a - 2$$

したがって

$$|\Delta(\beta) \cap \Delta(\alpha) \cap \Delta(\gamma)| = a - (k - a - 2) = 2a + 2 - k$$

故に

$$|\Delta(\alpha) \cap \Delta(\gamma)| \geq 2a + 2 - k + 1 = 2a + 3 - k.$$

I. 実際には $2a + 4 - k \geq |\Delta(\alpha) \cap \Delta(\gamma)| \geq 2a + 3 - k$ となるこ

とを示す

a). 任意の結ばれない2葉に対し、共通に結ばれる葉の数が $2a+3-k$ で一定であることを考える。

この時、グラフは、強正則グラフとなって、 D_n^G Higmanの結果を使うと、パラメーターの関係だけから矛盾はただちに示されます。

b). a)でない時、結ばれない2葉 α, γ を $|\Delta(\alpha) \cap \Delta(\gamma)|$ が最大になるようにとる。この時条件ii)から、 $\Gamma(\alpha) \cap \Gamma(\gamma) \neq \emptyset$ 。

$\Delta(\alpha) \cap \Delta(\gamma)$ の部分集合 S で、 S の葉がすべて互いに結ばれるとすると

$$|S| \leq \frac{1}{2} |\Delta(\alpha) \cap \Delta(\gamma)|.$$

さらに条件iii)から $\Delta(\alpha) \ni \beta$ とすると、 $\Delta(\alpha) \cap \Gamma(\beta)$ はすべて互いに結ばれる。

以上のことから、 $\Delta(\alpha) \setminus \Delta(\gamma) \ni \beta$ とすると

$$|\Delta(\alpha) \cap \Delta(\gamma) \cap \Delta(\beta)| \geq \frac{1}{2} |\Delta(\alpha) \cap \Delta(\gamma)|.$$

次に、 $\Delta(\alpha) \setminus \Delta(\gamma) \setminus \{\beta\}$ のある葉は β と結ばれないことを示す。

もし β が $\Delta(\alpha) \setminus \Delta(\gamma) \setminus \{\beta\}$ のすべての葉と結ばれたとすると

$$2a+2-k = 2|\Delta(\alpha) \cap \Delta(\beta) \cup \beta| - k \geq |\Delta(\alpha) \setminus \Delta(\gamma)|$$

$$\geq |\Delta(\alpha) \cap \Delta(\gamma)| \geq 2a+2-k+1, \quad \gamma \in \Gamma(\alpha) \cap \Gamma(\gamma).$$

矛盾である。

β と結ばれない $\Delta(\alpha) \setminus \Delta(\gamma) \setminus \{\beta\}$ の葉を β' とすると条件iii)から

$$\Delta(\alpha) \cap \Delta(\beta) \cap \Delta(\beta') = \phi, \quad \text{すなわち}$$

$$\{\Delta(\alpha) \cap \Delta(\gamma) \cap \Delta(\beta)\} \cap \{\Delta(\alpha) \cap \Delta(\gamma) \cap \Delta(\beta')\} = \phi.$$

さらに

$$\{\Delta(\alpha) \cap \Delta(\gamma) \cap \Delta(\beta)\} \cup \{\Delta(\alpha) \cap \Delta(\gamma) \cap \Delta(\beta')\} = \Delta(\alpha) \cap \Delta(\gamma).$$

だから, $\Delta(\alpha) \setminus \Delta(\gamma) \ni \forall \beta$ に対し

$$|\Delta(\alpha) \cap \Delta(\gamma) \cap \Delta(\beta)| = \frac{1}{2} |\Delta(\alpha) \cap \Delta(\gamma)|$$

したがって $\Delta(\alpha) \cap \Delta(\gamma) \ni \delta$ に対し

$$k - a - 2 = |\Delta(\alpha) \cap \Delta(\delta) \setminus \Delta(\gamma)| = \frac{1}{2} |\Delta(\alpha) \setminus \Delta(\gamma)|$$

故に

$$|\Delta(\alpha) \cap \Delta(\gamma)| = 2a + 4 - k.$$

II. 結ばれない任意の二点 α, γ に対し, $|\Delta(\alpha) \cap \Delta(\gamma)| = 2a + 4 - k$ である時を考える。

$|\Delta(\alpha) \cap \Delta(\gamma)|$ は証明から明らかのように偶数である。

$|\Delta(\alpha) \cap \Delta(\gamma)| = 2a + 4 - k = 2$ の時, $k = 2a + 2$ であり

intersection matrix $B(2a+2, a, 2)$ をもつ強正則グラフは, S. S. Shrikhande [2] によって決定されている。条件 iii) を満たすことから, 次元 2 の lattice グラフに限ることがわかる。

$|\Delta(\alpha) \cap \Delta(\gamma)| = 2a + 4 - k = 4$ の時 $k = 2a$ であり

intersection matrix $B(2a, a, 4)$ をもつ強正則グラフは

S.S. Schrikhande [3], W.S. Conner [4], A.J. Hoffman [5] によって完全に決定されている。条件 iii) を満たすことから、triangle グラフに限ることがわかる。

$|\Delta(\alpha) \cap \Delta(\gamma)| = 2a + 4 - k \geq 6$ の時、27 点からなるグラフに限ることを示す。証明の手順は次のようにする。

ステップ 1 に、 $2k \leq 3a + 4$ という不等式を示す。

ステップ 2 に、上の不等式から互いに結ばれない 4 点は存在しないことはすぐ示され、 $P(\alpha)$ の点の数を二通りに数えることにより $k = 4d$, $a = 3d - 2$ ($d \geq 3$) が証明される。

ステップ 3 に、intersection matrix $B(4d, 3d - 2, 2d)$ をもつ強正則グラフで定理の条件を満たすものは $d = 4$ の時だけであることを導く。

ステップ 1 の k と a の不等式が導びかれるならば、ステップ 2, ステップ 3 の証明は容易である。

ステップ 1 の不等式を証明する。

$P(\alpha) \ni \gamma$, $|\Delta(\alpha) \cap \Delta(\gamma)| = 2a + 4 - k$. ということは \neq

$\Delta(\alpha) \cap \Delta(\gamma)$ の各点は唯一つの $\Delta(\alpha) \cap \Delta(\gamma)$ の点と結ばれないことを示している。

したがって $\Delta(\alpha) \ni \beta_1, \beta_2$ β_1 と β_2 は結ばれない 2 点とする。

この時 $|\Delta(\beta_1) \cap \Delta(\beta_2) \cap P(\alpha)| = 1$ であり

$\Delta(\beta_1) \cap \Delta(\beta_2) \cap P(\alpha) = \{\gamma\}$ とすると $\Delta(\alpha) \cap \Delta(\gamma) = \Delta(\alpha) \cap \Delta(\beta_1) \cap \Delta(\beta_2) \cup \{\beta_1, \beta_2\}$

となる。

$\Delta(\alpha) \cap \Gamma(\beta_1) \setminus \{\beta_2\} \ni \delta$ とすると I の証明から明らか存よ
うに $|\Delta(\alpha) \cap \Delta(\beta_1) \cap \Delta(\delta)| = \frac{1}{2}(2a+4-k)$

故に

$$|\Delta(\alpha) \cap \Delta(\beta_1) \cap \Delta(\beta_2) \cap \Delta(\delta)| = \frac{1}{2}(2a+4-k) - 1$$

又、結ばれない点 β_1, δ について考えると

$$|\Delta(\alpha) \cap \Gamma(\beta_2) \cap \Delta(\delta)| = \frac{1}{2}(2a+4-k) - 1 \geq 2$$

$\Delta(\alpha) \cap \Delta(\beta_1) \cap \Delta(\beta_2) \cap \Delta(\delta) \ni \eta$ とすると、 η は $\Delta(\alpha) \cap \Gamma(\beta_2) \cap \Delta(\delta)$
の中に結ばれる点も結ばれない点も含む。この事実から

$$\Delta(\alpha) \cap \Gamma(\beta_1) \cap \Gamma(\eta) \neq \emptyset, \quad \Delta(\alpha) \cap \Gamma(\beta_2) \cap \Gamma(\eta) \neq \emptyset$$

が示される。

$|\Delta(\alpha) \cap \Gamma(\beta_1) \cap \Gamma(\eta)| + |\Delta(\alpha) \cap \Gamma(\beta_2) \cap \Gamma(\eta)| = k - a - 2$, 2"あ
るから $|\Delta(\alpha) \cap \Gamma(\beta_2) \cap \Gamma(\eta)| \geq \frac{1}{2}(k - a - 2)$ としてよい。

$\Delta(\alpha) \cap \Gamma(\beta_1) \cap \Gamma(\eta) \ni \rho$ とすると β_1, ρ は共に

$\Delta(\alpha) \cap \Gamma(\beta_2) \cap \Gamma(\eta)$ のすべての点と結ばれる。したがって

$\Delta(\alpha) \cap \Gamma(\beta_2) \cap \Delta(\rho) \supseteq \Delta(\alpha) \cap \Gamma(\beta_2) \cap \Gamma(\eta)$. 故に

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(2a+4-k) - 1 &= |\Delta(\alpha) \cap \Gamma(\beta_2) \cap \Delta(\rho)| \geq |\Delta(\alpha) \cap \Gamma(\beta_2) \cap \Gamma(\eta)| \\ &\geq \frac{1}{2}(k - a - 2) \end{aligned}$$

$$\therefore 3a+4 \geq 2k.$$

オ2, オ3の証明は省略します。

Ⅲ. 結ばれたい二点と共通に結ばれる点の数が $2a+3-k$ の時も $2a+4-k$ の時も 起きる場合 \therefore 定理 4 の 4) の グラフになることを証明する。

証明は3つの段階に分けます。

①に $2a+3-k \leq \frac{k}{3}$ を示す。

②に $2a+3-k=1$ ~~を示す~~ $k=2a+2$ を示す。

③に 条件を満たすグラフを決定する。

証明は容易でもないが長くなりますので省略させていただきます。

参考文献

- [1] N. Biggs: *Finite groups of Automorphisms*,
Cambridge University Press, 1971
- [2] S. S. Shrikhande: *The uniqueness of the*
 L_2 -association scheme,
Ann. Math. Statist. 30 (1959) 781-798
- [3] ———: *On a characterization of*
the triangular association scheme,
Ann. Math. Statist. 30 (1959) 39-47
- [4] W. S. Conner: *The uniqueness of the*
triangular association scheme,
Ann. Math. Statist. 29 (1958) 262-266
- [5] A. J. Hoffman: *On the uniqueness of*
the triangular association scheme,
Ann. Math. Statist. 31 (1960) 492-499