数理解析研究所講究録
201巻 1974年 194-196

混合問題の Green 函数の特異性

京大 数理研　河合隆裕

双曲型方程式に対する初期-境界値混合問題の Green 函数

即ち，時刻 $t=0$ での初期値を $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \delta(x')\delta(x_n-a) \end{pmatrix}$ $(a>0)$

で与え，$\{x_n=0\}$ での境界値が 0 になる，$P(t,x,D_t,D_x)E=0$ $(t\geq 0,\ x_n>0)$ の解 E の特異性を考えたい。本講で扱うのは次の2つの場合である。（境界面は常に非特性的と仮定する。）

1° $P(t,x,D_t,D_x)$ の主要部が t 方向に強双曲型（あるいは少しく一般に多重度一定）かつ境界条件 Lopatinsky 行列式が $\neq 0$，更に，所謂 shadow condition が満たされているとする。この時 $p_m(t,x',x_n;\tau,\xi',\xi_n)\big|_{\substack{x_n=0\\ \xi'=0}}=0$ は τ について実，単純根のみを持つ（多重度一定ならその多重度に応じる修正を要する。以下同じ）従って $(t,x';\tau,\xi')$ が $(t_0,x_0';1,0)$ のある近傍を動く限り そこでは問題は"双曲的"である。実際，その近傍は $p_m=0$，$\dfrac{\partial p_m}{\partial \xi_n}\neq 0$ なる条件を満たし $(t,x';\tau,\xi')=(t_0,x_0';1,0)$ を含む $(1-T)S^*N$ の連結成分に他ならぬ。ここに $N=\{x_n=0\}$，(t_0,x_0') は最も速い"波"（$(t,x',x_n)=(0,0,a)$ より出る陪特性曲線で最も速く N に達する物）の N への到達点である。従ってこの時は $\partial p_m/\partial \xi_n\neq 0$ 故陪特性曲線は N と横断的に交わる故，"浜田の方法"により反射波を容易に構成できる。E の特異性が N で反射される

陰特性帯に集中していることは 超函数の制限 積分等の作用と特異性スペクトラムの関係を用いて 初期値問題 の時と同様にできる。(たとえば河合, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 7 (1971) pp. 363 − 397 参照) 尚, 一階双曲型の場合は Lewis, J. Math. Mech 8 (1958) pp. 571−592 も参照。

2° もう一つの場合は P が定数係数, 斉次, 境界作用素も斉次の場合である。この時 $P = a(D)$, 境界作用素を B_p $(p = 1, \cdots, k)$ として (但し k は $a(\tau, \eta', \eta_n) = \prod_{j=1}^{m} (\eta_n - \lambda_j(\tau, \eta'))$ として (τ, η') が適当な柱状領域 Γ_0 を動く時 $\mathrm{Im}(\lambda_1), \cdots, \mathrm{Im}(\lambda_k) > 0$ ととれることが知られているから (たとえば松村; Proc. Japan Acad. 47 (1971) pp. 115−119 参照) その k をとる。) $\Delta(\tau, \xi') = \det(B_p(\tau, \eta', \lambda_j(\tau, \eta'))_{1 \le j, p \le k}$, $\varphi_j(t, x, s, y'; \tau, \eta') = x_n \lambda_j(\tau, \eta') + (t - s)\tau + \langle x' - y', \eta' \rangle$ を定め, E を

$$\int \sum \frac{1}{\Delta(\tau, \eta') \varphi_j^{\ell}(t, x, s, y'; \tau, \eta')} c_{j,\ell}\, \omega(\tau, \eta')$$

の形にて求める。(P, B_p いずれも斉次と仮定したのは, ここで係数 $c_{j,\ell}$ を決めることを容易にするためである。) 以下その特異性は Δ^{-1} の正則な領域と $\{\varphi_j \neq 0, \varphi_j$ 正則$\}$ という領域の共通部分を調べることにより, 被積分函数の特異性スペクトラムを調べ, 通常通り積分と特異性スペクトラムの関係を

見れば よい。その議論は本質的には（Atiyah-Bott-Gårding による）局所化の方法と言ってよい。（たとえば 河合，J. Math. Soc. Japan 24 (1972) pp. 481-517 等参照）しかし この場合 φ_j の正則な領域を調べる部分が面倒で 本質的に 平方根型の特異性を持つ λ_j（所謂 Agmon の条件）の場合以外 今の所 どのようにうまく幾何学的に捕えれるか 私には判らない。