数理解析研究所講究録
201巻 1974年 2-5

Hecke の予想について

京大理　上方弘明

1. $\Gamma_0(N) = \left\{ \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \;\middle|\; c \equiv 0 \bmod N \right\}$ とする。1936年に，Hecke は"（Nを素数として，weight 2, Haupt typus の）$\Gamma_0(N)$ の modular form は全て，level N の2次形式から作る theta 級数の一次結合として表せるだろう"と予想した（cf. Hecke: Analytische Arithmetik positiven quadratischen Formen, Kgl. Danske, Vid. Selskab. (12) 1940, p.100～）。

2. 1955年，Eichler によって，その予想は証明された。（Darstehlbarkeit von Modulformen durch Thetareihen, Crelle, (195) 1955, p157-）。同時に，彼はNが素数でないと，上の予想は一般には成立しないことを示した。そして，Nが squre free という仮定の下に，次のような（一寸みると奇妙な）命題を証明した。cf. 上に引用したもの，及び Quadratische Formen und Modul-

funktionen, Acta Arith (4) 1958, p217～). 後者では weight 2 以上も扱っているが，簡単のため，以下ではそれに示さない。

“ $f(\tau)$ を $\Gamma_0(N)$ の cusp form として，その フーリエ展開 at ∞ を $f(\tau)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i n\tau}$ とする。このとき次の2性質を充す $\Gamma_0(N)$ の cusp form $g(\tau)=\sum b_n e^{2\pi i n\tau}$ が存在する。

(i) $g(\tau)$ は level N 以下の2次形式から得られる theta 級数の一次結合

(ii) $(n, N)=1$ なら $a_n = b_n$ 。”

即ち，“level と素でない n を無視すると，theta で書ける” というのである。

3. N が素でないと Hecke 理論（の拡張）が成立しないのは割合簡単な理由による。M を N の約数，d を N/M の約数 $(d\neq 1)$ とすると，$\Gamma_0(M)$ の cusp form f は自然に $\Gamma_0(N)$ の cusp form とみられるが，更に $f(d\tau)$ も $\Gamma_0(N)$ の cusp form となり，こういう $f(d\tau)$ は（フーリエ級数が とびとびにしか出ないので theta で表せそうもないが）実際 theta では表せない。

4. Atkin-Lehner は $\Gamma_0(N)$ の cusp form f が <u>new form</u> であるというのを次によって定義した：

(i) $f(\tau)$ は $\Gamma_0(M)$ $(M|N)$ の cusp form $h(\tau)$ 及その transform $h(d\tau)$ $(d|\frac{N}{M})$ で生成される部分空間の orthogonal complement に入る

(ii) $f(\tau)$ は Hecke 作用素 T_n $((n,N)=1)$ の同時固有函数である.

そして彼等は $\Gamma_0(N)$ の cusp form の空間は $\Gamma_0(M)$ $(M|N)$ の new form $h(\tau)$ 及その transform $h(d\tau)$ $(d|\frac{N}{M})$ で張られることを示した. (cf. Hecke Operators on $\Gamma_0(m)$ Math. Ann (185) 1970)

5. このように3, 4を並べてみれば, Nが合成数のとき $\Gamma_0(N)$ の new form は theta で書けるか? というのが真の問題であることに気づく. これができれば一般の cusp form は theta とその(上のような簡単な) transform の一次結合でかける. これが, 最近, 私と斎藤裕君とで考えた問題であり, 答はまさに, その通りであった. 実際三宅敬恒氏の注意により 2. で, f を new form と仮定しさえすれば, $f=g$ と結論できる.

さらに我々は Eichler の証明法 (Hecke 作用素の cusp form の空間での trace と Brandt Matrix の trace を比べる) を new form の観点でまとめ直すことによって次のように改良できる.

6. 2の(i)の<u>N以下</u>を<u>丁度N</u>のもの(一般には更にその一部)に限れる.

7. 私の(Nがsqure freeと限らない)trace formula (U.S.-Japan Sem. Modern Method in Number theory 1971に発表)の定性的部分を使うことによって, Nがsqure freeの仮定を<u>Nが少くとも一つsimple prime factorをもつ</u> i.e. $\exists p$, $N=pN'$, $(p,N')=1$ p素. でおえることができる.

8. 6,7の証明には, thetaの方にもnew form(の生成するsubspace)に当るものを定義することがessentialである. 今迄述べた外見上には全く現れなかったが, 実際には$\Gamma_0(N)$がその単数群(のindex 2の部分群)になっているような($\mathbb{Q}$上のalgebra $M_2(\mathbb{Q})$の)order, 及び(ある意味でそれに対応して決る)$\mathbb{Q}$上のdefinite quaternionのorderの しかもその(数論的意味での)局所的性質がessentialである.

9. Nがsqure freeの仮定を落すには, 少くとも今迄扱われている$\Gamma_0(N)$型以外のorderの局所理論が必要である.