数理解析研究所講究録
202巻 1974年 62-71

有限要素法による定常粘性流体の解析

中央大　理工・土木　川原睦人

1．緒　言

有限要素法によってNavier-Stokes方程式を解析する方法について述べる。すでに，二，三の研究[1~3]がこの問題の可能性について論じているが，ここでは，定常流れに限定して，境界における条件の取扱い，非線形連立代数方程式の取扱いなどを中心として検討する。

2．基礎方程式

直角座標（x^i, $i=1,2,3$）による空間表示を用いることにする。非圧縮性粘性流体の層流流れの，平衡方程式は，

$$\rho u_j u_{i,j} = \tau_{ij,j} + \rho \hat{f}_i \qquad \text{(2.1)}$$

である。添字表現を用い，総和規約に従うとする。u_iは流速，$\hat{f}_i$は物体力，ρは密度である。τ_{ij}は応力で，

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) \qquad \text{(2.2)}$$

と表わされる。ここにPは圧力，μは粘性係数である。

連続方程式は，

$$u_{i,i} = 0 \qquad \text{--------} \quad (2.3)$$

と与えられる。境界条件としては，次の条件を考えることにする。境界S_1では，流速が規定されるとする。

$$u_i = \hat{u}_i \quad \text{on} \quad S_1 \qquad \text{---------} \quad (2.4)$$

ここに＾は境界で与えられた量であることを示す。境界S_2では，流速の勾配Q_iが，

$$Q_i = u_{i,j} n_j = \hat{Q}_i \quad \text{on } S_2 \qquad \text{---------} \quad (2.5)$$

となるとする。ここに，n_jは境界にたてた外向法線ベクトルの成分である。この条件は，流体の流れが，平行につながっていると考えるべき境界などに相当している。圧力が既知の境界をS_3とする。

$$P = \hat{P} \quad \text{on} \quad S_3 \qquad \text{---------} \quad (2.6)$$

流量Rが定められる境界S_4では，

$$R = u_i n_i = \hat{R} \quad \text{on} \quad S_4 \qquad \text{---------} \quad (2.7)$$

となる。応力τ_{ij}の合力が既知である境界S_5では，

$$S_i = \tau_{ij} n_j = \hat{S}_i \quad \text{on} \quad S_5 \qquad \text{---------} \quad (2.8)$$

が成立するものとする。

以上の基礎方程式に対して，有限要素法の定式化を考えるために，ガレルキン法によって，変分方程式を誘導する。

境界S_1では0で，他では任意の値を取る重み関数u_i^*を考え，式(2.1)の両辺にかけて，任意の領域Vについて積分し，多少変形して整頓すると，結局，次の方程式が得られる。

$$\int_V \rho(u_i^* u_j u_{i,j})dV - \int_V (u_{i,i}^* P)dV + \int_V \mu(u_{i,j} u_{i,j}^*)dV$$

$$+\int_V \mu(u_{i,j}^* u_{j,i})dV = \int_{S_5}(u_i^* \hat{S}_i) + \int_V (u_i^* \rho \hat{f}_i)dV \cdots\cdots (2.9)$$

一方，連続方程式(2.3)の両辺に，境界S_3では0で，他は，任意の値を取る重み関数P^*をかけて，領域Vについて積分すると，

$$\int_V (P^* u_{i,i})dV = 0 \qquad \text{-------}(2.10)$$

を得る。 式(2.9)，(2.10)は，強制境界条件としてS_1の条件を，自然境界条件としてS_5の条件を満足している。

式(2.9)と(2.10)を変形すると，それぞれ，

$$\int_V \rho(u_i^* u_j u_{i,j})dV + \int_V (u_i^* P_{,i})dV + \int_V \mu(u_{i,j}^* u_{i,j})dV$$

$$= \int_{S_2} \mu(u_i^* \hat{Q}_i)dS + \int_V \rho(u_i^* \hat{f}_i)dV \qquad \text{------} (2.11)$$

$$\int_V (P_{,i}^* u_i)dV = \int_{S_4}(P^* \hat{R})dS \qquad \text{------} (2.12)$$

なる方程式が得られる。 式(2.11)，(2.12)は，強制境界条件として S_1，S_3 の条件を，自然境界条件として，S_2，S_4 の条件をそれぞれ満足している。

3．有限要素法

解析する流れの場を，かさなり合わない部分領域に分割し，分割された一つの領域を有限要素と呼ぶ。 有限要素の境界上に選ばれた節点における流速 $u_{\alpha i}$ と圧力 P_α を用いて，有限要素内部の流速 u_i と圧力 P を，

$$u_i = \Phi_\alpha u_{\alpha i} \qquad \text{-------- (3.1)}$$

$$P = \Psi_\alpha P_\alpha \qquad \text{-------- (3.2)}$$

のごとく補間する。 補間に用いられる関数 Φ_α と Ψ_α は，形状関数と呼ばれている。 重み関数にも，同様の関数を仮定し，(2.9)，(2.10) の変分方程式に代入し，整頓すると，次の関係を得ることができる。

$$K_{\alpha\beta\gamma j} u_{\beta j} u_{\gamma i} + H_{\alpha i\beta} P_\beta + M_{\alpha i\beta j} u_{\beta j} = \hat{\Omega}_{\alpha i} \qquad \text{---- (3.3)}$$

$$H_{\alpha i\beta} u_{\alpha i} = \hat{\Gamma}_\alpha \qquad \text{------ (3.4)}$$

ここに，

$$K_{\alpha\beta\gamma j} = \int_V \rho(\Phi_\alpha \Phi_\beta \Phi_{\gamma,j})\, dV, \quad H_{\alpha i\beta} = -\int_V (\Phi_{\alpha,i} \Psi_\beta)\, dV$$

$$M_{\alpha i\beta j} = \int_V \mu\{(\Phi_{\alpha,k} \Phi_{\beta,k})\delta_{ij} + (\Phi_{\alpha,i} \Phi_{\beta,j})\}\, dV$$

$$\hat{\Omega}_{\alpha i}=\int_V p(\hat{f}_i \Phi_\alpha)dV+\int_{S5}(\Phi_\alpha \hat{S}_i)dS, \quad \hat{\Gamma}_\alpha=0$$

である。 また，同様にして，変分方程式(2.11)，(2.12)より式(3.3)，(3.4)と同じ方程式が得られる。 このとき，係数は $K_{\alpha\beta\gamma j}$ を除いて，以下のように変更される。

$$H_{\alpha i\beta}=\int_V(\Phi_\alpha \Phi_{\beta,i})dV, \quad M_{\alpha i\beta j}=\int_V \mu(\Phi_{\alpha,k}\Phi_{\beta,k})\delta_{ij}dV$$

$$\hat{\Omega}_{\alpha i}=\int_V(p\hat{f}_i \Phi_\alpha)dV+\int_{S2}(\Phi_\alpha \hat{Q}_i)dS, \quad \hat{\Gamma}_\alpha=\int_{S4}(\Phi_\alpha \hat{R})dS$$

式(3.3)，(3.4)を，流れの場全体について立て，これを組み合わせると，全節点の流速と圧力に関する方程式が，次のように得られる。

$$F_\alpha=K_{\alpha\beta\gamma}U_\beta U_\gamma+H_{\alpha\lambda}P_\lambda+M_{\alpha\beta}U_\beta-\hat{\Omega}_\alpha=0 \quad \text{------} \quad (3.5)$$

$$G_\lambda=H_{\alpha\lambda}U_\alpha-\hat{\Gamma}_\lambda=0 \quad \text{------} \quad (3.6)$$

ここに U_α は，流れの場全節点の流速を表わし，P_λ は，全節点の圧力である。 式(3.5)，(3.6)を連立して解き，U_α と P_λ を求めれば，流れの場における流速と圧力の近似値を定めることができる。 なお，形状関数には，流速について，二次の多項式を，圧力については一次の多項式を用いて計算している。

4．非線形連立代数方程式の解法

非線形連立代数方程式（3.5）と（3.6）を解くことによって，求める近似値が得られる。構造解析においては，一般にくり返えし代入法，ニュートンラプソン法，摂動法などが良く用いられている。くり返えし代入法による場合には，式（3.5）と（3.6）を，まず，次のように変形する。

$$\begin{bmatrix} M_{\alpha\beta} & H_{\alpha\lambda} \\ H_{\beta\mu} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_\beta \\ P_\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\Omega}_\alpha \\ \hat{\Gamma}_\mu \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Sigma_\alpha \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{---------} \quad (4.1)$$

ここに，　$\Sigma_\alpha = K_{\alpha\beta\gamma} v_\beta v_\gamma$　--------- （4.2）

である。式（4.1）の右辺第2項 Σ_α を0と仮定して，式（4.1）を解けば，クリープ流れの流速と圧力が，計算される。この解を用いて，順次くり返し計算を行なえば，非線形方程式を解くことができる。式（4.1）にみるごとく，係数行列が対称であるために，大変数の連立方程式を解くのには都合が良いが，この計算では，粘性が小さく，流速が大きい流れの計算では，収束が著しく悪くなる。著者の数値実験では，図－1に示す最も簡単な平行流の計算で，レイノルズ数約150程度まで計算されている。

ニュートン・ラプソン法によって，式（3.5），（3.6）を解く場合には，方向微係数を求める必要がある。すなわち，

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial v_\beta} = K_{\alpha\beta\gamma} v_\gamma + K_{\alpha\gamma\beta} v_\gamma + M_{\alpha\beta} \qquad \text{--------} (4.3)$$

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial P_\lambda} = H_{\alpha\lambda}, \qquad \frac{\partial G_\mu}{\partial v_\beta} = H_{\beta\mu} \qquad \text{-------} (4.4), (4.5)$$

である。いまここで，

$$\Phi_\alpha = \begin{bmatrix} F_\alpha \\ G_\mu \end{bmatrix}, \quad I_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_\alpha}{\partial v_\beta} & \dfrac{\partial F_\alpha}{\partial P_\lambda} \\ \dfrac{\partial G_\mu}{\partial v_\beta} & 0 \end{bmatrix} \quad x_\beta = \begin{bmatrix} v_\beta \\ P_\lambda \end{bmatrix}$$

とおくと，

$$\Phi_\alpha = \Phi_\alpha(0) + I_{\alpha\beta}(0)\cdot(x_\beta - x_\beta(0)) \approx 0 \qquad \text{-----} (4.6)$$

なる関係が得られる。ここに，$x_\beta(0)$ は適当に選ばれた基準となる流速と圧力であり，$I_{\alpha\beta}(0)$，$\Phi_\alpha(0)$ は $x_\beta(0)$ より計算された $I_{\alpha\beta}$，Φ_α の値である。式 (4.6) より，

$$x_\beta = x_\beta(0) - I^{-1}_{\alpha\beta}(0)\cdot\Phi_\alpha(0) \qquad \text{--------} (4.7)$$

なる関係が得られ，これを用いて，くり返えし計算を進めれば，求める解が得られる。式 (4.6) の $I_{\alpha\beta}$ にみるごとく，連立方程式の係数は，非対称になり，それだけ，大変数の連立方程式を解く上で，不利になるが，収束が早く，また，安定も良い。ニュートン・ラプソン法で解く場合には，基準

となる初期値が，充分に正解に近くないと，計算が収束しないことがある。　初期値として，クリープ流れの解を用いるのは適当でなく，求めんとするレイノルズ数の流れを何段階かに分割して，順次，ニュートン・ラプソン法によって，収束させて，最終的に解を得る方法を取るのが良い。　すなわち，ニュートン・ラプソン法と摂動法を組み合わせた方法によって計算するのが，最も安定した解法である。

5．数値計算例

図－1に，両側を壁に囲まれた平行流の計算例を上げる。壁面では，流速0の境界条件を用いている。　レイノルズ数は50である。　図－2には，壁間隔が異る場合の計算例を示す。　入口でもレイノルズ数は340である。

6．参考文献

1. J.T. Oden and Somogi: "Finite Element Applications in Fluid Dynamics". proc. ASCE, Vol 95. EM3. P821~6, 1968
2. J.T. Oden: "The Finite Element Method in Fluid Mechanics" NATO Advanced Study Institute. Lisbon, 1971
3. A.J. Bakers: "Finite Element Solution Algorithm for Viscous Incompressible Fluid Dynamics". Int. J. Num. Meth. Engng. Vol. 6. 1973

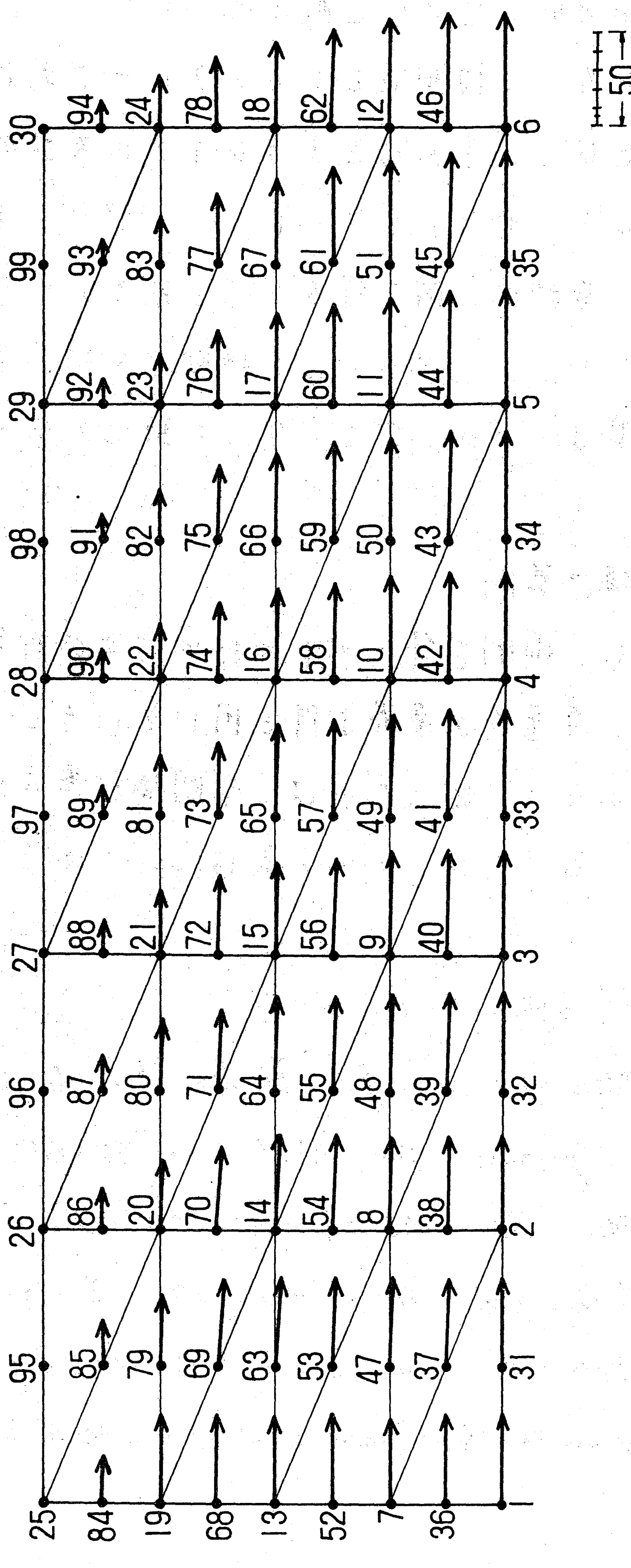
25 95 26 96 27 97 28 98 29 99 30
84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94
19 79 20 80 21 81 22 82 23 83 24
68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78
13 63 14 64 15 65 16 66 17 67 18
52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62
7 47 8 48 9 49 10 50 11 51 12
36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46
1 31 2 32 3 33 4 34 5 35 6
50

Fig. 1

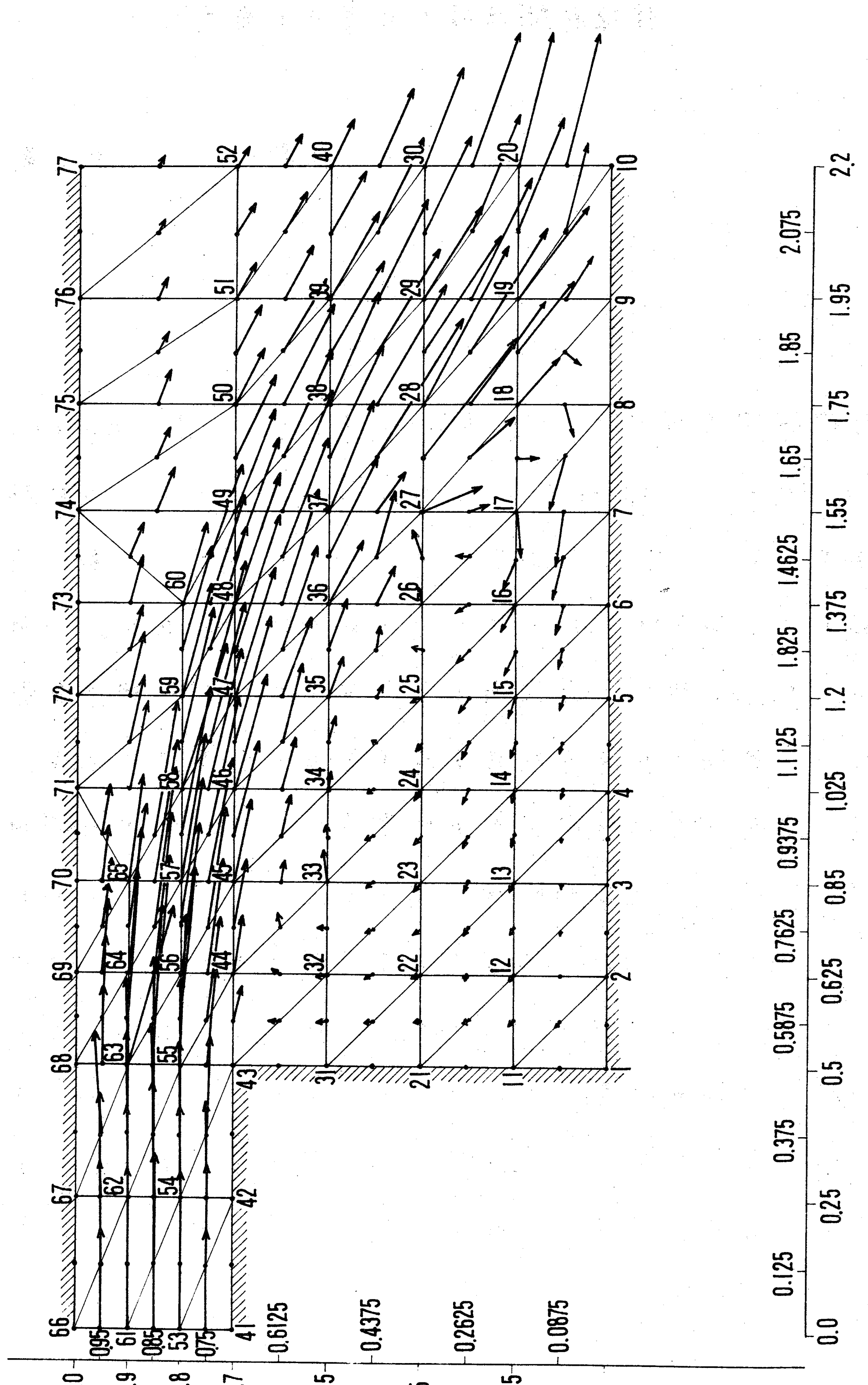
0.0
0.125
0.25
0.375
0.5
0.5875
0.625
0.7625
0.85
0.9375
1.025
1.1125
1.2
1.375
1.4625
1.55
1.65
1.75
1.85
1.95
2.075
2.2
1.0
0.95
0.9
0.85
0.8
0.75
0.7
0.6125
0.525
0.4375
0.35
0.2625
0.175
0.0875
0.0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77

Fig. 2