

7次元ホモトピー球面の上の
 $SO(3)$ 作用について.

津田塾大 吉田朋好

§ 1. 序

7次元ホモトピー球面の上に、どのような $SO(3)$ の作用があり得るか？を調べるのが目的である。 $SO(3)$ の球面への作用の研究としては、R. W. RICHARDSON [4], MONTGOMERY - SAMELSON [3]等がある。[4]では、5次元球面上には、同変位相同型を除いて、線形な作用しか存在しないことが示されている。又、[3]では S^7 への微分可能な作用に於ては、必ず次元が2より小さい軌道 (orbit) の存在が示されている。これは言い換えれば $SO(2) \subset SO(3)$ の固定点が必ず存在することである。この定理の証明は、微分可能性とホモロジーの性質しか用いないので、ホモトピー球面についても、そのまま適用する。我々は、この定理を基礎にして、7次元ホモトピー球面への $SO(3)$ の微分可能な作用を調べてみようと思う。

§ 2. $SO(3)$ 作用の構成

この§では、軌道型 (orbit type) の数 2 又は 3 の $SO(3)$ 作用を若干構成してみる。それらは、3つのタイプにわかれる。

タイプ (I)

X を 5次元、コンパクト、可縮で境界のある微分可能多様体とする。 D^3 を 3-胞体とし、 $X \times D^3$ に $SO(3)$ 作用を、 X には自明に且つ、 D^3 には 3次元実既約表現 (以下、 α と記す) によって入れる。 $\partial(X \times D^3)$ は n -同境定理により 7次元標準球面 S^7 に微分同相である。従って、我々は、 S^7 の上の $SO(3)$ 作用を得る。

とくに $X = D^5$ とすれば、この作用は、 α の $SO(3)$ (θ は 1次元自明表現) となる。

タイプ (II)

X を 4次元、コンパクト、可縮で境界のある微分可能多様体とする。又、 $S^2 \subset \partial X$ を埋め込まれた 2次元球面とする。我々は、 X 上の軌道構造を入れる。

$$(SO(3) / D_2) \quad \text{on} \quad X - \partial X$$

$$(SO(3) / N) \quad \text{on} \quad \partial X - S^2$$

(固定点) $on S^2$

ここは D^2 は位数4の2面体群、 N は $SO(2)$ の正規化群。同変位相同型を除いて、このような軌道構造をもつ、 $SO(3)$ -空間は2種類、存在する [

]。しかし、そのうちの一つだけが、微分可能作用をもつ、微分可能多様体となる。とくに、それは、7次元標準球面 S^7 に微分同相となることがわかる。(これは、証明を要するが、はぶく。)

$X = D^4$ とすれば、この作用は、 β の 3θ となる。(β は、5次元実既約表現)

タイプ (Ⅳ)

X を4次元、コンパクト、可縮で境界のある微分可能多様体とする。 $S^1 \subset \partial X$ を埋めこまれた1次元球面とする。

$\tilde{\mathbb{Z}}$ を、 $\pi_1(\partial X - S^1) \rightarrow H_1(\partial X - S^1) \approx \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_2 = \text{Aut } \mathbb{Z}$ によって、ねじった \mathbb{Z} をファイバーとするねじり係数とする。(\mathbb{Z} は整数環をあらわす)。我々は

$H^2(\partial X - S^1; \tilde{\mathbb{Z}}) = 0$ の仮定をおく。

X に次の軌道構造を入れる。

($SO(3)$) $on X - \partial X$

$$\left(\frac{SO(3)}{SO(2)} \right) \quad \text{on } (\partial X - S')$$

$$(\text{固定点}) \quad \text{on } S'$$

同変位相同型を除いて、このような軌道構造をもった $SO(3)$ -空間は、2種類ある ([])。しかし、そのうちの一つだけが、微分可能作用をもった、微分可能多様体となる。とくに、それは、ホモトピー球面となる。

(証明略)

$X = D^4$, $S' \subset S^3 = \partial D^4$ を自明な結び目とすれば S^1 の上の作用 $2\alpha \oplus 2\theta$ を得る。

§ 3. 主定理

我々の主定理は、次のように述べられる。

定理 : (Σ, φ) を ホモトピー 7 -球面の上のなめらかな $SO(3)$ -作用とし、それは軌道型の数が、2ないしは3であるとす。この時、 (Σ, φ) は § 2 で構成されたもののうちのひとつとなる。とくに、 Σ が異種球面の場合には、タイプ (IV) に限る。

§4. 定理の証明の概略.

まず、A. BOREL の定理 () から、次のことがわかる。

$$7 - \dim F(D_2) = 3 \dim F(\mathbb{Z}_2) - 3 \dim F(D_1)$$

ここに $F(H)$ は H による固定点集合 (これは部分多様体) をあらわす。これより、 $\dim F(\mathbb{Z}_2) = 5$, $\dim F(D_1) = 4$ 又は $\dim F(\mathbb{Z}_2) = 3$, $\dim F(D_1) = 1$ となる。次の4つの場合に分ける。

CASE 1. $\dim F(\mathbb{Z}_2) = 5$ かつ $F(D_2) = F(N)$

CASE 2. $\dim F(\mathbb{Z}_2) = 5$ かつ $F(D_2) \neq F(N)$

CASE 3. $\dim F(\mathbb{Z}_2) = 3$ かつ $F(\mathbb{Z}_2) = F(SO(2))$

CASE 4. $\dim F(\mathbb{Z}_2) = 3$ かつ $F(\mathbb{Z}_2) \neq F(SO(2))$

このそれぞれの場合に、まず軌道型を決定し、相互の関連を見てゆけば、CASE 1 は §2 のタイプ (I) に、CASE 2 はタイプ (II) に、CASE 3 はタイプ (III) に帰着することがわかる。又、CASE 4 の場合には、軌道型の数は4つ以上ある。

CASE 4 の場合は、線形なものとしては、 α の θ と β の θ (θ は 7次元実既約表現) とがあるが、軌道型はこのいずれかに一致することがわかる。又、この場合も、構成の仕方はいちがうが、CASE 1 ~ 3 まで

のように、はっきりした形では得られていない。

Reference.

- [1]. A. Borel et al. ; Seminar on Transformation Groups ; Ann. of Math. Studies No. 46.
- [2]. G. E. Bredon ; Introduction to Compact Transformation Groups ; Academic Press.
- [3]. D. Montgomery - H. Samelson ; Action of $SO(3)$ on S^n ; Pacific J. Math 12 (1962) p 649-659
- [4]. R. W. Richardson ; Actions of the rotation group on the 5-sphere . Ann. of Math. 74 (1961) p. 414 - 423