数理解析研究所講究録
203巻 1974年 42-51

$Spin^c$-多様体上のsemi-freeなS^1-作用について

東工大(理) 北田泰彦

§1.

M^nをorientedなn次元(可微分)多様体とし、あるリーマン計量に関するoriented orthonormal tangent n-framesのなす$SO(n)$-bundleをF_Mで表わす。Mにcompact群Gが作用している時は、リーマン計量はG-不変であるものを考えてよいから、GはF_Mにも作用し、その作用はM上の作用とcompatibleである。M^nが$Spin^c$-構造P_Mを持つとは、F_Mが$Spin^c(n)$-reductionを持つこと、すなわちP_MはM上の$Spin^c(n)$-bundleであり、$F_M \cong P_M \times_{Spin^c(n)} SO(n)$が成立つことである。ここに$Spin^c(n)$は自然な射影$Spin^c(n) \to SO(n)$により$SO(n)$に左から作用する。群$G$が$Spin^c$-構造を持つ多様体$M^n$に作用(左から)するとは、

(1) GはM, F_M及びP_Mへの作用φをもち

(2) F_M, P_Mにおける作用はbundle mapであり、

(3) 作用 φ は射影 $P_M \to F_M \to M$ と compatible であることとする。このような object を (M^n, P_M, φ) で表わし、Spin^c-構造を保つ G 作用をもつ多様体とよぶ。

群 G の subgroup の families $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}'$ ($\mathcal{F} \supset \mathcal{F}'$) が与えられたとき、Spin^c-構造を保つ G-作用をもつ多様体 (M^n, P_M, φ) で、その isotropy groups が $G_x \in \mathcal{F}$ $(x \in M)$, かつ $G_x \in \mathcal{F}'$ $(x \in \partial M)$ であるものの全体を考え、それらに自然な cobordism relation を入れて得られたアーベル群を $\Omega_n^{Spin^c}(G; \mathcal{F}, \mathcal{F}')$ と書く。また $\partial M = \phi$ のものを考えることにより、$\Omega_n^{Spin^c}(G; \mathcal{F}) = \Omega_n^{Spin^c}(G; \mathcal{F}, \phi)$ を定義する。

定理 1.

$$\Omega_n^{Spin^c}(S^1; \{S^1, 1\}) \cong \Omega_{n-2}^{Spin^c}(\mathbb{Z}^* \times BU(1)) \oplus \sum_{g>1} \Omega_{n-2g}^{Spin^c}(\mathbb{Z} \times BU(g))$$

ここで $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$ である。

(注) Free な S^1-作用の場合には、$\Omega_n^{Spin^c}(S^1; \{1\}) \cong \Omega_{n-1}^{Spin^c}(BU(1))$ が成立つ。

定理 2.

S^1-作用が semi-free で M^n の Spin^c-構造を保つとき、M の Todd genus は次の式で与えられる。

$$T(M)=\sum_{r_i\geq 0}\left\{(1+ch\,\nu_i)^{r_i}\mathcal{T}(X_i)\right\}[X_i]$$
$$+\sum_{r_i\leq-(q_i+1)}(-1)^{q_i+1}\left\{(1+ch\,\bar{\nu}_i)^{-(r_i+q_i+1)}\mathcal{T}(X_i)\right\}[X_i].$$

ここで、$\{X_i\}$ は fixed point set の component の family，$q_i=\operatorname{codim}X_i/2$，$r_i$ は作用より定まる整数(後出)、ν_i は X_i の normal bundle に S^1- 作用による自然な複素構造を入れたものである。

系 3

M^n が概複素多様体で、S^1 が複素構造を保つように semi-free に作用するとき、

$$T(M)=\sum_{d_i^+=q_i}T(X_i)=\sum_{d_i^-=q_i}(-1)^{q_i}T(X_i)$$

が成立つ。 ここに $d_i^+(d_i^-)$ は S^1 が complex number (その conjugate) として X_i の normal bundle に作用する次元である。(Kosniowski [2])

系 4.

M^n が Spin - 構造を持ち、S^1 がその Spin - 構造を保ちながら semi-free に M^n に作用するとき、$\hat{A}(M)=0$ である。(Atiyah - Hirzebruch [1])

§2. Equivariant ω-class と free S^1-作用

左からの S^1-作用をもつ空間 Y に対し、$Y_{S^1} = ES^1 \times_{S^1} Y$ と定義する。ここに、ES^1 は base を $BS^1 \simeq \mathbb{C}P^\infty$ とする普遍 S^1-bundle の total space である。$P \xrightarrow{p} X$ を $Spin^c(n)$-bundle としたとき、$w_2(P) \in H^2(X;\mathbb{Z}_2)$ の integral な reduction $\omega(P) \in H^2(X;\mathbb{Z})$ が定まる。P が X の $Spin^c$-構造（この場合 X は多様体）であるときは $\omega(P)$ を ω_X とも書くことにする。今、S^1-作用が P と X に compatible なように与えられているとき、$p_{S^1} : P_{S^1} \longrightarrow X_{S^1}$ もまた $Spin^c(n)$-bundle となる。その ω-class $\omega(P_{S^1})$ を P の S^1-equivariant ω-class と呼び $\omega^{S^1}(P) \in H^2(X_{S^1};\mathbb{Z})$ で表わす。P が多様体 X の $Spin^c$-構造であるときには、$\omega_X^{S^1}$ とも表わす。

補題 1.

$p : P \longrightarrow X$ を $Spin^c(n)$-bundle とし、S^1 が P, X に左から作用し、その作用は p と compatible かつ P 上の作用は $Spin^c(n)$ の右からの作用と可換であるとする。

$\pi : ES^1 \times X \longrightarrow X_{S^1}$ を自然な射影、

$p_2 : ES^1 \times X \longrightarrow X$ を第2項への射影とすると、

$\pi^*(\omega^{S^1}(P)) = p_2^*\,\omega(P)$ が成立つ。

(証明) ω-classのnaturalityとω^{S^1}-classの定義より明らかである。■

この補題はω^{S^1}-classがω-classの拡張であることを示す。

補題 2.

(M^n, P_M, φ)をSpin^c-構造を保つS^1-作用とし、作用はfreeであるとする。そのときorbit space $\bar{M} = M/S^1$はまたSpin^c-構造$P_{\bar{M}}$をもち、$\pi: M \longrightarrow \bar{M}$をorbit mapとすると、Spin$^c(n-1)$-bundle $\pi^* P_{\bar{M}}$のSpin$^c(n)$-bundleへの拡大とP_Mは一致する。

(証明) M^nのtangent bundle τ_Mのsubbundle τ'_MをS^1-orbitsに直交するtangent vector全体として定義する。

τ'_MはS^1-不変であり、その$(n-1)$-framesの作る$SO(n-1)$-bundleをF'_Mとすると、F'_MはF_Mのreductionであり、$P_M \to F_M$と$F'_M \to F_M$のfibered productをP'_Mとすると、P'_MはF'_MのSpin$^c(n-1)$へのreductionである。一方、S^1はF_M, P_M及びF'_Mにcompatibleに作用するから、P'_Mへも作用し、その作用はfreeかつ、P'_Mのbundle mapとなっている。$\bar{P}'_M = P'_M/S^1$を考えると、これは、$\bar{M}$上のSpin$^c(n-1)$-bundleであり、$\bar{M}$のframe bundleとして$\bar{F}'_M = F'_M/S^1$がとれることから、$\bar{P}'_M$が$\bar{M}$のSpin^c-構造$P_{\bar{M}}$としてとれる。逆に作り方より$\pi^* P_{\bar{M}} \cong P'_M$である

から P_M は $\pi^* P_{\bar{M}}$ の拡大である。■

(M^n, P_M, φ) を同じく $Spin^c$-構造を保つ free な S^1-作用とする。$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, $D^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ とみなして、$W^{n+1} = M \times D^2 / S^1$ $\left((x, v) \sim (gx, gv) \quad g \in S^1\right)$ とする。$i : M \longrightarrow W$, $p : W \longrightarrow \bar{M}$ 及び $j : \bar{M} \rightarrow W$ を $i(x) = [x, 1]$, $p([x, v]) = [x]$ 及び $j([x]) = [x, 0]$ で定義すると、i, p, j は S^1-equivariant である。但し，W 上の S^1-作用は $g[x, v] = [gx, v]$ で定義する。

補題 3.

$Q = p^*(P_{\bar{M}} \oplus M^*)$ は W^{n+1} の tangent bundle の $Spin^c(n-1) \times U(1)$-reduction であり、従って W に $Spin^c(n+1)$-構造 P_W を与える。W 上の S^1-作用はこの $Spin^c$-構造を保ち、W の $Spin^c$-構造及び M の $Spin^c$-構造は compatible である。ここに M^* は M に右からの $U(1)$-作用を $x \cdot g = g^{-1} x$ で与えた $\bar{M}$ 上の $U(1)$-bundle である。更に次の公式が成立つ。

$$i^*(\omega_W) = \omega_M = \pi^*(\omega_{\bar{M}})$$

$$\omega_W = p^*(\omega_{\bar{M}} + c)$$

但し、c は bundle $M^* \longrightarrow \bar{M}$ の Chern class とする。

(証明) 作り方から容易にわかる故略する。■

次にいくつかの ω^{S^1}-class を計算する。これまでのこの § の記法をそのまま用いる。

補題 4.

$Spin^c$-構造を保つ S^1-作用 (M^n, P_M, φ) が free であるとする。 $ES^1 \times M \xrightarrow{p_2} M$ は $M_{S^1} \xrightarrow{\bar{p}_2} \bar{M}$ を induce し、

$\bar{p}_2$ は homotopy 同値で、$\bar{p}_2^*(\omega_{\bar{M}}) = \omega_M^{S^1}$ が成立つ。

(証明) $P_M \cong P'_M \times_{Spin^c(n-1)} Spin^c(n)$ であるから、

$$(P_M)_{S^1} \cong (P'_M)_{S^1} \times_{Spin^c(n-1)} Spin^c(n)$$

従って $\omega_M^{S^1} = \omega^{S^1}(P'_M)$ が成立つ。

一方、$\bar{p}_2^*(P_{\bar{M}}) \cong P'_M$ であることから結論を得る. ■

$$W_{S^1} = ES^1 \times_{S^1} W \simeq ES^1 \times_{S^1} \bar{M} = BS^1 \times \bar{M}$$

により、
$$H^2(W_{S^1}; \mathbb{Z}) \cong H^2(BS^1 \times \bar{M}; \mathbb{Z}) \cong H^2(\bar{M}; \mathbb{Z}) \oplus H^2(BS^1; \mathbb{Z})$$

と見做すとき、次の補題を得る.

補題 5.

$\omega_W^{S^1} = (\omega_{\bar{M}} + c) - \alpha$.

ここで α は $H^2(BS^1; \mathbb{Z})$ の生成元.

(証明) 補題 3 及び、$\omega^{S^1}(M^*) = c - \alpha$ であることから知られる. ■

§3. 定理の証明の概略

まず、補題2により、定理1の(注)

$\Omega_n^{Spin^c}(S^1;\{1\}) \cong \Omega_{n-1}^{Spin^c}(BU(1))$

が成立つことに注意する。

次に定理1を示すために、よく知られた完全系列

$$0 \longrightarrow \Omega_n^{Spin^c}(S^1;\{S^1,1\}) \xrightarrow{\beta} \Omega_n^{Spin^c}(S^1;\{S^1,1\},\{1\}) \xrightarrow{\partial} \Omega_{n-1}^{Spin^c}(S^1;\{1\}) \longrightarrow 0$$

を考える。$\Omega_n^{Spin^c}(S^1;\{S^1,1\},\{1\})$ の代表元 (V, P_V, φ) として次の条件をみたすものがとれる。V は $X = \mathrm{Fix}\,\varphi$ 上の linear な disk bundle であり、S^1 は linear map $V \to V$ を与える。$g = \frac{1}{2}\,\mathrm{codim}X$ とする。$H^2(V_{S^1};\mathbb{Z}) \cong H^2(X_{S^1};\mathbb{Z}) \cong H^2(X;\mathbb{Z}) \oplus H^2(BS^1;\mathbb{Z})$ により $\omega_V^{S^1} = \xi + l\alpha$ $(l \in \mathbb{Z})$ とあらわす。$l \equiv g \pmod{2}$ であることがわかるから、$r = (l-g)/2$ とおく。一方、S^1-作用による V の自然な複素構造を考えることにより、(V, P_V, φ) に対して、(X, V, r) が $\Omega_{n-2g}^{Spin^c}(\mathbb{Z} \times BU(g))$ の代表元として決まる。この操作により、$\Omega_n^{Spin^c}(S^1;\{S^1,1\},\{1\}) \cong \sum_{g \geq 1} \Omega_{n-2g}^{Spin^c}(\mathbb{Z} \times BU(g))$ が言える。∂ の両辺写像は associated D^2-bundle を作ることで得られ、その image は $\Omega_{n-2}^{Spin^c}(0 \times BU(1))$ であるから定理1が証明できる。

定理2を示すためには、β の左逆写像 $\mathbb{P}$ を作ることを行なう。$\Omega_n^{Spin^c}(S^1;\{S^1,1\})$ の代表元 (M^n, P_M, φ) をとり、

φ の fixed point の成分の family を $\{X_i\}$ とする。各 X_i の S^1-不変な closed tubular neighborhood V_i をとり、$M_0 = M - \bigcup_i \mathrm{int}\, V_i$ とする。$H_i = (\partial V_i \times D^2)/S^1$, $W = (M_0 \times D^2)/S^1$ と定め、∂V_i と ∂H_i を同一視して $K_i = V_i \cup (-H_i)$ とする。ここで"$-$"の符号は H_i の向きを逆にすることを示す。各 K_i は自然な Spin^c-構造 P_{K_i} 及び自然な S^1-作用 φ_i をもち、$\Omega_n^{\mathrm{Spin}^c}(S^1;\{S^1,1\})$ の元 $(K_i, P_{K_i}, \varphi_i)$ を定める。(一般の $\Omega_n^{\mathrm{Spin}^c}(S^1;\{S^1,1\},\{1\})$ の元に対しても同様な構成法により β の左逆写像 $\mathbb{P}$ が作れるが、定理2の証明のためには β の image 上のみで $\mathbb{P}$ を作るだけでよい.)。(W, P_W, φ) は (M, P_M, φ) と $\bigcup_i (K_i, P_{K_i}, \varphi_i)$ の間の cobordism を与えるから、$\Omega_n^{\mathrm{Spin}^c}(S^1;\{S^1,1\})$ の元として、

$$[M, P_M, \varphi] = \sum_i [K_i, P_{K_i}, \varphi_i]$$

が成立つ。Spin^c-多様体 M^n の Todd-genus $T(M)$ を

$$T(M) = \left\{ e^{\frac{\omega_M}{2}} \hat{\mathfrak{A}}(M) \right\} [M]$$

で定義すると、上の場合には、

$$T(M) = \sum_i T(K_i)$$

であり各 K_i についての ω_{K_i} を求めればよいことがわかる。(V_i, P_{V_i}, φ) を $\Omega_{n-2q_i}^{\mathrm{Spin}^c}(\mathbb{Z} \times BU(q_i))$ $(q_i = \mathrm{codim}\, X_i/2)$ の元として (X_i, V_i, ξ_i) で表わし、§2の補題を用いて、$\omega_{K_i}^{S^1}$ をもとめることができ、更に補題1により ω_{K_i} を得る。すなわち、$e_i : X_i \longrightarrow M$ を inclusion, $p_i : K_i \longrightarrow X_i$ を fiber が

CP^{g_i} と diffeo な fiber bundle の射影とすると、

$$\omega_{K_i} = (g_i + 2r_i)\,\alpha_i + p_i^* \epsilon_i^*(\omega_M)$$

が得られる。（α_i = K_i 上の canonical $\mathbb{C}$ line bundle の Chern class.） 以後、Borel-Hirzebruch "Characteristic classes and homogeneous spaces" §22 に従って計算を行なうと定理2を得る。

系3. は $r_i = -d_i$ なることを定義に従って行なえばよい。Kosniowski [2] の公式と比べて $(-1)^{g_i}$ が異るが、これは X_i の向き付けの違うためである。

系4. は $r_i = -\frac{g_i}{2}$ 従って、$-g_i \leqq r_i \leqq -1$ であることから明らかである。

[1] Atiyah, Hirzebruch; Spin-manifolds and group actions, Essays on Topology and Related Topics, 18-28.

[2] Kosniowski; Applications of the holomorphic Lefschetz formula, Bull. London Math. Soc., (1970), 43-48.