数理解析研究所講究録
203 巻 1974 年 29-34

有限群の作用するホモトピー球面のつくる群について

京大 数研　阿部孝順

§1 定義

Gを有限群とし $\alpha : G \longrightarrow O(m)$ をGの表現とする

$$\varphi : G \times \Sigma^m \longrightarrow \Sigma^m$$

をGのホモトピー球面上の可微分なsemi-freeな作用とし (φ, Σ^m) と書くことにする.

(φ, Σ^m) が次の条件をみたすとき α - 球面ということにする

(i) φ の固定点が又ホモトピー球面 Σ^n $(n \geq 1)$

(ii) $\Sigma^n \ni {}^{\forall}x$ に対して

$$\varphi_x : G \longrightarrow O(T_x\Sigma^m) \quad ; \varphi_x(g) = d\varphi(g,\ )_x$$

が表現として α と同値である.

$D_m(\alpha)$: α - 球面のG - 微分同相な類全体の集合

$D_m(\alpha)$ には固定点の回りの連結和を用いて和が定義される.
定義の可能性等については[1]を参照されたい.

(L, S^m) : $(m+1)$-次元表現($\alpha \oplus$ trivial.) を R^{m+1} の単位球面 S^m に制限して得られる線型なα球面.

(L, S^m) は $D_m(\alpha)$ の零元になる.

又 $\psi : G \times D^m \longrightarrow D^m$

を m 次元円板 D^m 上の可微分な semi-free な作用としたとき上のα球面の定義での固定点集合をホモトピー球面とした代わりに n 次元円板 D^n として同様の条件を満たすものをα-円板ということにする.

$E_m(\alpha)$: α円板のG微分同相な類全体のつくる集合.

$E_m(\alpha)$ も境界連結和により半群をなす.

M. Sebastiam は[2]において固定点の次元が零次元の場合に $D_m(\alpha)$ が群をなしこの様子を調べている. ここでは固定点の次元が正の場合に考えてみる.

§2 $E_m(\alpha)$ の構造

(ψ, D^m) をα円板とする. 以下では $m-n>2$ を仮定する.

$\mathrm{int}\, D^n \ni x$, $B^m_{2\varepsilon}$ を x の回りのG不変な 2ε 円板

T^m_ε : $(D^n - \mathrm{int}\, B^m_{2\varepsilon})$ の $(D^m - \mathrm{int}\, B^m_{2\varepsilon})$ における ε 管状近傍(G-不変なもの)

$$\left.\begin{aligned} W^m &\fallingdotseq D^m - \mathrm{int}\,(B^m_{2\varepsilon} \cup T^m_\varepsilon) \\ W_0^{m-1} &\fallingdotseq \partial B^m_{2\varepsilon} - \mathrm{int}\,(\partial B^m_{2\varepsilon} \cap T^m_\varepsilon) \\ W_1^{m-1} &\fallingdotseq \partial D^m - \mathrm{int}\,(\partial D^m \cap T^m_\varepsilon) \end{aligned}\right\} \text{free な作用をもつ G-多様体}$$

$$\overline{W}^m \doteqdot W^m/G \quad , \quad \overline{W}_0^{m-1} \doteqdot W_0^{m-1}/G \quad , \quad \overline{W}_1^{m-1} \doteqdot W_1^{m-1}/G$$

$\partial W^m = W_0^{m-1} \cup W_1^{m-1} \cup V^{m-1}$　（V^{m-1}はT_ε^mの同伴球面バンドル）

$$V^{m-1} \cong \partial W_0^{m-1} \times [0,1] \quad : \text{G-微分同相}$$

なることより（$\overline{W}^m; \overline{W}_0^{m-1}, \overline{W}_1^{m-1}$）はhコボルディズムと在り

$$\tau(\varphi) \doteqdot \tau(\overline{W}^m, \overline{W}_0^{m-1}) \in Wh(G)$$

が定義され．φだけに依っていることが分かる

補助定理

$m \geqq 6$ ，$m-n>2$ ならば$E_m(\alpha)$は$Wh(G)$の元と１対１に対応している．

証明　(φ, D^m)，(φ', D'^m) を二つのα円板として(φ, D^m)に対して $W^m, W_0^{m-1}, W_1^{m-1}, V^{m-1}$ を上記と同じ記法にし(φ', D'^m)にはダッシュをつけて表わすことにする．

$\tau(\varphi) = \tau(\varphi')$ とする．$\overline{V}^{m-1} \cong \overline{V}'^{m-1}$（微分同相）だから

S - cobordism theorem に依り（uniqueness）

$$\overline{W}^m \cong \overline{W}'^m \quad (\text{微分同相})。$$

$W^m \longrightarrow \overline{W}^m$ ，$W'^m \longrightarrow \overline{W}'^m$ は普遍被覆なことから

$$W^m \cong W'^m \quad (\text{G-微分同相}).$$

又この G-微分同相は適当にとると

$$D^m \cong D'^m \quad (\text{G-微分同相})$$

に拡張できる．

又 $\tau \in Wh(G)$ に対して s − cobordism の存在定理から $\tau(\psi)=\tau$ なる α 円板 (ψ, D^m) の存在が示される．

註：　$\tau : E_m(\alpha) \longrightarrow Wh(G)$ は定義より準同型であり，従って補助定理により同型対応である．

§3.　$D_m(\alpha)$ について

$m-n>2$ とする

(φ, Σ^m) を α 球面としたとき x を固定点とする

B^m_ε を x の回りの G 不変な ε 円板とする。φ を $(\Sigma^m - \mathrm{int}\, B^m_\varepsilon)$ に制限して α 円板 $(\psi, \Sigma^m - \mathrm{int}\, B^m_\varepsilon)$ を得る　但し $n \geqq 5$

$$\tau(\varphi) \fallingdotseq \tau(\psi) \in Wh(G)$$

とすると $\tau(\varphi)$ は φ だけに依り決まる．

定理 1：

(φ, Σ^m), (φ', Σ'^m)　：二つの α 球面　　$n \geqq 5$

$\tau(\varphi)=\tau(\varphi')$ ならば φ と φ' は連続な作用として同値

証明　　B^m_ε を上記と同じものにし (φ', Σ'^m) に対しては B'^m_ε と書くことにする．　$\tau(\varphi)=\tau(\varphi')$ だから補助定理より

$$f : (\Sigma^m - \mathrm{int}\, B^m_\varepsilon) \cong (\Sigma'^m - \mathrm{int}\, B'^m_\varepsilon) \quad (G\text{-微分同相})$$

$$F : \Sigma^m \longrightarrow \Sigma'^m$$

を $\qquad F|_{\Sigma^m - \mathrm{int}\, B_\varepsilon^m} \doteqdot f$

$\qquad F(t\cdot v) \doteqdot t\cdot f(v) \qquad (0 \leq t \leq 1,\ v \in \partial B_\varepsilon^m)$

とするとFは同相写像でGの作用を保つ

註： Wh(G)=0ならば定理1よりα球面は連続的には線型な作用しかないことが分かる． G. Bredon は S^1, S^3 作用に対して同様の事を示している（[1]）

定理2

$m-n>2$, $n \geq 5$ ならば $D_m(\alpha)$ は群をなす．

証明： (φ, Σ^m) を仮定をみたすα球面とする．

xを固定点としてB_ε^mをxの回りのG－不変な円板とする．

$$W^{m+1} \doteqdot (\Sigma^m - \mathrm{int}\, B_\varepsilon^m) \times [0,1]$$

とするとW^{m+1}にはφから自然にG作用が入いる。又角を滑らかにしてこの作用が可微分にするとα円板(ψ, W^{m+1})ができる．

$\tau(\psi) = \tau(\varphi)$ なることに注意．

補助定理より $\tau(\psi') = -\tau(\psi)$ なるα円板(ψ', D^{m+1})が存在する．

$\tau(\psi \# \psi') = \tau(\psi) + \tau(\psi') = 0$ だから $\psi\#\psi'$は線型な作用である．

$$\therefore \quad L \cong \partial(\psi \# \psi') \cong \partial\psi \# \partial\psi' \cong \varphi \# (-\varphi) \# \partial\psi'$$

（$-\varphi$はφと逆向きをもつもの）

故に $(-\varphi) \# \partial\psi'$ は求めるφの逆元

参考文献

[1] G. Bredon : Introduction to compact transformation groups. Chapt VI.
; Acad Press. (1972).

[2]. M. Sebastiani : Sur les actions adeux points de groups finits sur les spheres.
; Comm Math Helv vol 45 (1970)