数理解析研究所講究録
206巻 1974年 144-158

Bounded approximation by analytic functions

北大 応電研　小林佑子

§1 序

最近、A. Davie [3] によって $A(U)$ 上での一様有界各点収束に於て、収束列を極限関数のノルムより小さい物で取り直せる事、及び $R(K)$ に対しても類似の結果が成立することが示された。ここではこの事実に基づいたT. Gamelin とJ. Garnett の結果[7] を中心に紹介する。

まず、1つの正測度 σ に対し、或性質 $P_\sigma(1)$ を持つ測度 τ を考えて、これを一般の函数環 A と関連付けて考える。即ち、$\tau \in A^\perp$ が σ に対し $P_\sigma(1)$ を持つ時の2, 3の結果を述べる。次に §3、§4 では $A(U)$, $R(K)$ に対し §2 で考えた関係の成立する測度の具体例を考える。特に $A(U)^\perp$, $R(K)^\perp$ に対し σ に相当する測度を考え、§2 で得られた結果を各場合について考察する。

まず一般論から始める。

§2. Distance estimates for uniform algebras.

この章では X は compact space とし，X 上の複素（実）連続函数全体を $C(X)$ $(C_R(X))$ で表わす。A は X 上の uniform algebra を示す。又，正測度 σ に対し，A の $L^\infty(\sigma)$ での weak* 閉包を $H^\infty(\sigma)$ で表わす。任意の $h \in C(X)$ に対し，

$$d(h, A) = \inf\{\|h - f\|,\ f \in A\}$$

とする。又，$d(h, H^\infty(\sigma))$ に対しても同様であるものとする。

まず始めに基本的な補題を示す。

補題 2.1. τ は X 上の測度とする。もし $H^\infty(\sigma+|\tau|)$ から $H^\infty(\sigma)$ への制限写像が isometry ならば，この写像は onto な写像である。

今，次のような性質を持つ X 上の測度 τ を考える。

$P_\sigma(1)$: (i). $\operatorname{supp}(\tau) \subseteq \operatorname{supp}(\sigma)$.

(ii). $\tau\text{-}\operatorname{ess}\limsup\limits_{y \to x} |F(y)| \leq \sigma\text{-}\operatorname{ess}\limsup\limits_{y \to x} |F(y)|$.

但し $x \in \operatorname{supp}(\tau)$, $F \in H^\infty(\sigma+|\tau|)$

この性質 $P_\sigma(1)$ は次に示す性質 $P_\sigma(2)$ によって書き変えられることが補題 2.2 によって示される。

$P_\sigma(2)$: $u \in C_R(X)$, $u \geq 0$ 及び $F \in H^\infty(\sigma+|\tau|)$ に対し $|F| \leq u$ a.e. $(d\sigma)$ ならば $|F| \leq u$ a.e. $(d\tau)$ である。

補題2.2. τをX上の測度とする。この時

τが性質$P_\sigma(1)$をもつ。$\Leftrightarrow$ τが性質$P_\sigma(2)$をもつ。

証明) $\Rightarrow$は明らか故 $\Leftarrow$だけを示す。今, $p \in X - supp(\sigma)$とする。$u = 1$ on $supp(\sigma)$ かつ $u(p) < 1$ なるような $u \in C_R(X)$, $u \geqq 0$をとれば, $1 \in H^\infty(\sigma + |\tau|)$ より $F = 1 \leqq u$ a.e.$(d\sigma)$ 故, $1 \leqq u$ a.e.$(d\tau)$。よって $p \notin supp(\tau)$ で(i)が示される。次に(ii)が不成立とすればある$F \in H^\infty(\sigma+|\tau|)$ 及びある $x \in supp(\tau)$ に対し

$\tau\text{-}ess \lim_{y\to x} \sup|F(y)| > \sigma\text{-}ess \lim_{y \to x} \sup|F(y)|$。よってある $c > 0$ と x の近傍Vが存在して, $|F| < c$ a.e.$(d\sigma)$ on V でかつ $\{y \in V, |F(y)| > c\}$ は正の$|\tau|$-測度をもつ。今 $u = c$ on V かつ $|F| \leqq u$ a.e.$(d\sigma)$なる $u \in C_R(X)$, $u \geqq 0$を考えればτは$P_\sigma(2)$を持たない。よって$P_\sigma(2)$ならば$P_\sigma(1)$である。

補題2.3. X上の測度τが$P_\sigma(1)$を満すならば

(i) $H^\infty(\sigma+|\tau|)$から$H^\infty(\sigma)$への制限写像はisometryである。

(ii) $h \in C(X)$, $F \in H^\infty(\sigma + |\tau|)$に対し

$$\| h - F \|_{L^\infty(\sigma+|\tau|)} = \| h - F \|_{L^\infty(\sigma)} \text{ である。}$$

証明). (i) $supp(\tau) \subseteqq supp(\sigma)$。$\sigma\text{-}ess \lim_{y\to x} \sup|F(y)| = c_x$とする。$F \in H^\infty(\sigma+|\tau|)$に対し, ある $f \in H^\infty(\sigma)$ が存在して, $F = f$ a.e.$(d\sigma)$である。又 $\forall \varepsilon > 0$, $\forall x \in supp(\tau)$に対し, あるxの近傍V_xが存在して $|F(y)| < c_x + \varepsilon$ a.e.$(d\sigma)$ かつ a.e.$(d\tau)$ on V_x

故．$|F(y)| < C_x + \varepsilon \leq \|F\|_{L^\infty(\sigma)} + \varepsilon$ a.e. $d(\sigma + |\tau|)$ on V_x。$\forall x \in supp(\sigma) - supp(\tau)$ に対し x の近傍 V_x を $V_x \cap supp(\tau) = \phi$ かつ $|F| < C_x + \varepsilon$ a.e $(d\sigma)$ on V_x に取れば．結局．$\forall x \in supp(\sigma + |\tau|)$ に対し．$|F| < \|F\|_{L^\infty(\sigma)} + \varepsilon$ a.e. $d(\sigma + |\tau|)$ on V_x となり．$\|F\|_{L^\infty(\sigma+|\tau|)} = \|F\|_{L^\infty(\sigma)}$ を得る。逆向きは明らか故 $\|F\|_{L^\infty(\sigma+|\tau|)} = \|F\|_{L^\infty(\sigma)}$ である。

(ii) の証明。　$\forall x \in supp(\tau)$ に対し

$$
\begin{aligned}
\tau\text{-}\mathrm{ess}\limsup_{y \to x} |h(y) - F(y)| &= \tau\text{-}\mathrm{ess}\limsup_{y \to x} |h(x) - F(y)| \\
&\leq \sigma\text{-}\mathrm{ess}\limsup_{y \to x} |h(x) - F(y)| \\
&= \sigma\text{-}\mathrm{ess}\limsup_{y \to x} |h(y) - F(y)|
\end{aligned}
$$

より (i) と同様にして結果を得る。

定理 2.4.　$\forall \tau \in A^\perp$ が $P_\sigma(1)$ を持つならば．

$$d(h, A) = d(h, H^\infty(\sigma)), \quad \forall h \in C(X) 。$$

特に．$A = H^\infty(\sigma) \cap C(X)$ である。

証明）．　$h \in C(X)$ とする。$\forall f \in H^\infty(\sigma)$ である。この時．ある $\tau \in A^\perp$ が存在し；$d(h, A) = |\int h d\tau|$, $\|\tau\| \leq 1$ とできる。τ は $P_\sigma(1)$ を持つ故．補題 2.3 よりある $F \in H^\infty(\sigma + |\tau|)$ が存在して．$F = f$ a.e. $(d\sigma)$ とできる。$\tau \perp H^\infty(\sigma + |\tau|)$ より $|\int h d\tau| = |\int (h - F) d\tau| \leq \|h - F\|_{L^\infty(\tau)} \leq \|h - F\|_{L^\infty(\sigma+|\tau|)} = \|h - F\|_{L^\infty(\sigma)}$ である。よって　$d(h, A) \leq \|h - F\|_{L^\infty(\sigma)} = \|h - f\|_{L^\infty(\sigma)}$ である。

これはすべての $f\in H^\infty(\sigma)$ に対し成立する。よって $d(h,A)\leqq d(h,H^\infty(\sigma))$。逆は明らか故 $d(h,A)=d(h,H^\infty(\sigma))$ である。

§3 Application to $A(U)$

ここでは前の章で示した性質 $P_S(1)$ を持つ測度の具体例を $A(U)$ に対して考える。

U は複素平面内の有界開集合とし，$\overline{U}$ で U の閉包を，∂U で U の境界を示すものとする。$C(\overline{U})$ ($C_R(\overline{U})$) で $\overline{U}$ 上の複素(実)数値連続函数の全体を示し，$A(U)=\{f\in C(\overline{U}) : f \text{ analytic in } U\}$ とする。又 $H^\infty(U)$ は U 上の有界解析函数全体を示す。U に制限された面積測度を λ_U で，$\overline{U}$ 上の正測度 σ に対し，$H^\infty(\sigma)$ で $A(U)$ の $L^\infty(\sigma)$ での weak* 閉包を表わす。$A(U)^\perp$ は $A(U)$ に対する orthogonal measure の全体である。

今 f を $\mathbb{C}$ 上の bounded Borel function とし，g を compact な台を持つ smooth function とする。

$$(T_g f)(\zeta)=\frac{1}{\pi}\iint\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}\cdot\frac{\partial g}{\partial\bar{z}}\,dx\,dy$$

$$=g(\zeta)f(\zeta)+\frac{1}{\pi}\iint\frac{f(z)}{z-\zeta}\cdot\frac{\partial g}{\partial\bar{z}}\,dx\,dy\ ,\ \zeta\in\mathbb{C}\ \text{とおく。}$$

$T_g f$ の性質については[5]，[6]に詳しく述べられている。

$$B=\left\{f\in H^\infty(U) :\ \begin{array}{l}\exists\{f_n\}\subset A(U),\ \sup_n\|f_n\|<\infty\\ f_n\longrightarrow f\ \ \text{pointwise on } U\end{array}\right\}$$

とする。この時次の定理が成立する。この定理は重要である。

定理2.1 (A. Davie)

$f \in B$ ならば，ある $\{g_n\} \subset A(U)$ が存在して，$\|g_n\| \leq \|f\|$ かつ $g_n \longrightarrow f$ pointwise on U とできる。

上の定理より直ちに次の系を得る。

系3.2.　B は $L^\infty(\lambda_U)$ に於る weak* 閉包である。

よって，$B = H^\infty(\lambda_U)$ である。

上の結果を基本として $\rho \in A(U)^\perp$ に対し，λ_U を σ として取れることを以下に示す。

補題3.3　任意の $\rho \in A(U)^\perp$ に対し，$F \in H^\infty(\lambda_U + |\rho|)$ が $F = 0$ a.e. $(d\lambda_U)$ ならば $F \equiv 0$ である。

証明)　$\rho \perp H^\infty(\lambda_U + |\rho|)$ 故，$F\rho \perp A(U)$。又，$F = 0$ a.e $(d\lambda_U)$ より $F/(z-\lambda) \in H^\infty(\lambda_U + |\rho|)$ a.e. $\lambda \in U$。よって $\int \frac{F\,d\rho}{z-\lambda} = 0$ a.e.$(d\lambda_U)$ $\lambda \in U$。よって [2] の補題1.1 より $\int gF\,d\rho = 0$, $\forall g \in C(\partial U)$ かつ supp$(F\rho) \subseteq \overline{U}$ より $F\rho \equiv 0$。一方，$\rho \neq 0$ より，$F = 0$ a.e.$(d\rho)$。よって $F \equiv 0$ である。

補題3.4.　任意の $\rho \in A(U)^\perp$ とする。今，

$H^\infty(\lambda_U + |p|)$ から $H^\infty(\lambda_U)$ への制限写像は algebra isometric isomorphism である。

証明）．isometric は定理 2.1 より得られる。後は明らかである。

補題 3.5.　$f \in H^\infty(\lambda_U)$ とする。今，f analytic at $p_0 \in \mathbb{C}$ ならば，$(f - f(p_0))(z - p_0)^{-1} \in H^\infty(\lambda_U)$ である。

証明）．$p_0 \notin \overline{U}$ と $p_0 \in U$ に対しては明らか故，$p_0 \in \partial U$ に対してだけ証明する。今 f analytic at $p_0 \in \partial U$ ならば $\exists \delta > 0$ が存在して f analytic in $\Delta(p_0; \delta)$ である。$p_n \to p_0$，$p_n \in \Delta(p_0; \delta) \cap (\mathbb{C} - \overline{U})$ とする。この時，$\forall \delta' < \delta$ に対して $\exists M_1 > 0$ が存在し，$|F_n(z)| = |(f(z) - f(p_n)) \times (z - p_n)^{-1}| < M_1$，$z \in \overline{\Delta}(p_0; \delta') \cap (U - \{p_0\})$，$(n \geqq 0)$。一方，$\exists M_2 > 0$ が存在して $|F_n(z)| < M_2$，$z \notin \overline{\Delta}(p_0; \delta')$ $(n \geqq 0)$ である。よって $F_n(z) \in H^\infty(\lambda_U)$ $(n \geqq 1)$ は p_0 以外の点で $F_0(z)$ に有界各点収束する。従って $F_0(z) = f(z) - f(p_0) / z - p_0 \in H^\infty(\lambda_U)$ である。

補題 3.6.　g を compact な台を持つ smooth function とする。この時，$f \in H^\infty(\lambda_U)$ ならば，$T_g f \in H^\infty(\lambda_U)$ である。

証明) $(T_g f)(\zeta) = \frac{1}{\pi}\iint \frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}\frac{\partial g}{\partial \bar z}dxdy$

$$= \frac{1}{\pi}\iint_{\mathbb{C}-U} \frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}\frac{\partial g}{\partial \bar z}dxdy + \frac{1}{\pi}\iint_{U} \frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}\frac{\partial g}{\partial \bar z}dxdy$$

$= F_1(\zeta) + F_2(\zeta)$, $(\zeta \in U)$ とする。

この時，$F_1 \in A(U)$ であり，$f \in H^\infty(\lambda_U)$ より $(f(z)-f(\zeta))(z-\zeta)^{-1} \in H^\infty(\lambda_U)$ a.e. $(d\lambda_U)$, $\zeta \in U$。一方 $\exists \{f_n\} \subset A(U)$ が存在して，$\|f_n\| \leqq \|f\|$ かつ $f_n \to f$ a.e. $(d\lambda_U)$ である。このとき

$$(T_g f_n)(\zeta) = \frac{1}{\pi}\iint \frac{f_n(z)-f_n(\zeta)}{z-\zeta}\frac{\partial g}{\partial \bar z}dxdy = F_{n1}(\zeta) + F_{n2}(\zeta) \quad (\zeta \in \bar U) \text{ とする。}$$

但し，F_{n1}，F_{n2} は上と同様に定める。この時，F_{n1}，$T_g f_n \in A(U)$ より $F_{n2} \in A(U)$ であり，$(f_n(z)-f_n(\zeta))(z-\zeta)^{-1} \in A(U)$ は a.e. $(d\lambda_U)$ $\zeta \in U$ に対し $(f(z)-f(\zeta))(z-\zeta)^{-1}$ に $L^\infty(\lambda_U)$ で weak* 収束する。よって F_{n2} は F_2 に a.e. $(d\lambda_U)$ on U で有界各点収束する故 $F_2 \in H^\infty(\lambda_U)$ である。従って $T_g f = F_1 + F_2 \in H^\infty(\lambda_U)$ である。

補題 3.7. $f \in H^\infty(\lambda_U)$ かつ $p \in \bar U$ とする。この時ある $C > 0$ とある $\delta > 0$ に対し，$|f| \leqq C$ a.e. $(d\lambda_U)$ on $\Delta(p;\delta)$ ならばある $f_0 \in H^\infty(\lambda_U)$ が存在して，$f - f_0$ は p の近傍に analytic に拡張でき，かつ，$\|f_0\| \leqq 9C$ である。

証明) g を $\Delta(p;\delta)$ 上の compact な台を持つ smooth function

で $0\leqq g\leqq 1$, p の近傍で $g=1$, かつ $|\partial g/\partial\bar{z}|\leqq 4/\delta$ なるものとする。この時 f_0 として $T_g f$ を取ればよい。

定理 3.8　任意の $\rho\in A(U)^{\perp}$ は $P_{\lambda_U}(1)$ を満す。

証明）　$F\in H^\infty(\lambda_U+|\rho|)$ に対し $P_{\lambda_U}(1)$ が不成立とすれば $\exists p\in\bar{U}$ が存在して

$$\rho\text{-}\mathrm{ess}\limsup_{y\to p}|F(y)|>\lambda_U\text{-}\mathrm{ess}\limsup_{y\to p}|F(y)| \text{ である。}$$

今 F を適当に作りかえ，$\rho\text{-}\mathrm{ess}\limsup_{y\to p}|F(y)|>100>1>\lambda_U\text{-}\mathrm{ess}\limsup_{y\to p}|F(y)|$ と考えてよい。$f\in H^\infty(\lambda_U)$, $F=f$ a.e.$(d\lambda_U)$ とすると $\exists\delta>0$ が存在して $|f|<1$ a.e. $(d\lambda_U)$ on $\Delta(p;\delta)$ である。補題 3.7 の f_0 を考え，$f_1=f_0+(f-f_0)(p)$ とすると $f-f_1$ は p で analytic でかつ $(f-f_1)(p)=0$。補題 3.6 よりある $h\in H^\infty(\lambda_U)$ が存在して，$f-f_1=(z-p)h$ である。$\|f_0\|\leqq 9$ より，$f_1+(z-p)h=f$, $\|f_1\|\leqq 17$。補題 3.4 より F_1, $H\in H^\infty(\lambda_U+|\rho|)$ が存在して，$F=F_1+(z-p)H$, かつ $\|F_1\|\leqq 17$ である。よって，$\rho\text{-}\mathrm{ess}\limsup_{z\to p}|F(z)|=\rho\text{-}\mathrm{ess}\limsup_{z\to p}|F_1(z)|\leqq 17$ で矛盾する。よって ρ は $P_{\lambda_U}(1)$ をもつ。

定理 3.9.　次は同値である。

(i)　$A(U)$ は $H^\infty(U)$ で pointwise boundedly dense である。

(ii)　$d(h, A(U))=d(h, H^\infty(U))$, $\forall h\in C(\bar{U})$ である。

証明） (i)が成立すれば $H^\infty(\lambda_U)=H^\infty(U)$ である。又定理3.8及び定理2.4より $d(h, A(U))=d(h, H^\infty(\lambda_U))$, $\forall h\in C(\bar{U})$ である。従って(ii)が成立する。(ii) $\rightarrow$ (i)は[4]の定理2.2による。

今，μをUに対する∂U上の調和測度とする。即ち，U_iをUの開成分，$z_i\in U_i$ $(i\geq 1)$に対しμ_iをz_iに対する∂U_i上の調和測度とし，$\mu=\sum_i \mu_i/2^i$とする。任意の$f\in L^\infty(\mu)$に対し，$\tilde{f}(z)=\int f d\mu_z$, $z\in U$とする。この時，map$(f\rightarrow\tilde{f})$は$L^\infty(\mu)$からU上の有界調和函数への連続写像である。

補題3.10. map$(f\rightarrow\tilde{f})$は$L^\infty(\mu)$から$L^\infty(\lambda_U)$の或weak* 閉部分空間へのlinear isometric isomorphismである。

証明） isometricなる事はDirichlet問題に於るfに対する$\tilde{f}$の定め方より明らかである。後はこの事実と合せ明らか。

補題3.11. $U\supset V$を開集合とする。$f\in L^\infty(\mu)$に対し∂V上の函数gを

$$g=\begin{cases}\tilde{f} & \text{on } \partial V\cap U\\ f & \text{on } \partial V\cap\partial U\end{cases}$$

と定めるならば，

$\tilde{g}(z)=\tilde{f}(z)$, $z\in V$ である。

補題 3.12. 任意の $\lambda_0 \in \partial U$, 任意の $f \in L^\infty(\mu)$ に対し

$$\operatorname*{ess\,lim\,sup}_{\lambda \in \partial U,\ \lambda \to \lambda_0} |f(\lambda)| \leqq \limsup_{U \ni z \to \lambda_0} |\tilde{f}(z)|$$ が成立する。

更にもし λ_0 が正則境界点であるとき，及び，$\tilde{f}$ が U 上で analytic のときに等号が成立する。

証明). 右辺 $= C$ とおく。この時 $\forall \varepsilon > 0$ に対し $\exists \delta > 0$ が存在し $|\tilde{f}| < C + \varepsilon$ on $\Delta(\lambda_0, \delta) \cap U = V$. 補題 3.11 の g を考えれば $\tilde{g}(z) = \tilde{f}(z)$, $z \in V$ である。よって $\|\tilde{g}\|_V = \|\tilde{f}\|_V < C + \varepsilon$。又，補題 3.10 より $\|g\| = \|\tilde{g}\|_V < C + \varepsilon$。又，補題 3.11 より ∂U 及び ∂V 上での各々の調和測度は $\partial U \cap \partial V$ に含まれる可測集合に対し，同じ値をとる。従って $|f| < C + \varepsilon$ a.e. (μ) on $\partial U \cap \partial V$。よって不等式が成立。
λ_0 が正則境界点の時には $z \in U$, $z \to \lambda_0$ に対し $\mu_z \to \delta_{\lambda_0}$ に weak* 収束する事より得られる。又，$\tilde{f}$ が analytic on U のときには Iversen の結果より得られる。

以上の $L^\infty(\mu)$ に対する結果と補題 3.4 とより次の結果を得る。

定理 3.13. $\forall \rho \in A(U)^\perp$ に対し

map$(f \to \tilde{f})$ は $H^\infty(\mu + |\rho|)$ から $H^\infty(\lambda_U)$ への algebra isometric isomorphism である。

定理 3.14.　$\rho \in A(U)^{\perp}$,　ρ は ∂U 上の測度とする。

この時 ρ は $P_{\mu}(1)$ を持つ。

証明)　上の定理 3.13 及び ρ が $P_{\lambda_U}(1)$ 従って $P_{\lambda_U}(2)$ をもつこと

更に Iversen の結果等を用いることにより定理は証明される。

系 3.15　$\rho \in A(U)^{\perp}$ に対し，次は同値である。

(i)　$A(U)$ が $H^{\infty}(U)$ で pointwise boundedly dense である。

(ii)　$H^{\infty}(\mu+|\rho|)$ と $H^{\infty}(U)$ に於て map $(f \to \tilde{f})$ は algebra isometric isomorphism である。

証明)　定理 3.13 及び補題 3.4 より得られる。

系 3.16　　$d(h, A(U)) = d(h, H^{\infty}(\mu))$　$\forall h \in C(\partial U)$。

§4　Application to R(K).

ここでは §2 を R(K) に対応させた時について述べる。主たる結果は定理 4.5 である。

K を compact 集合とし，R(K) は K の外側に極をもつ有理函数による C(K) 内での一様閉包を示す。又，Q は R(K) の non-peak point 全体の集合とし，λ_QはQに制限された面積測度を表わすものとする。$R(K)$の$L^\infty(\lambda_Q)$でのweak* 閉包を$H^\infty(U)$で示す。$R(K)^\perp$は$R(K)$に対するorthogonal measureの全体を示すものとする。

補題4.1（Wilken）　任意の$\tau \in R(K)^\perp$に対し，

$$\hat{\tau}(z) = \int \frac{d\tau(\zeta)}{\zeta - z} \quad \text{とおくと} \quad \hat{\tau} = 0 \ \text{a.e.}\ (dxdy)$$

on $\mathbb{C} - Q$である。

系4.2.　hをcompactな台をもつ有界なBorel函数とする。今

$$H(\zeta) = \iint_{C-Q} \frac{h(z)}{z-\zeta}\, dx\, dy \qquad (\zeta \in K)$$

とすれば　$H(\zeta) \in R(K)$　である。

次の定理は$A(U)$に於る時と同様に重要である。

定理4.3（A. Davie）　任意の$f \in H^\infty(\lambda_Q)$に対し，ある$\{f_n\} \subset R(K)$が存在して，$\|f_n\| \leqq \|f\|$，かつ　$f_n(z) \to f(z)$ a.e. $(dxdy)$ $z \in Q$とできる。

定理4.4.　任意の$\tau \in R(K)^\perp$は$P_{\lambda_Q}(1)$をもつ。

証明） $H^\infty(\lambda_Q)$ に対し 補題3.5は成立し，4.3より補題3.4は成立する。又上の系4.2，定理4.3より補題3.6が従って3.7が成立し，これらの事実より定理は証明される。

上の定理と定理2.4より直ちに次の結果を得る。

定理4.5. $H^\infty(\lambda_Q)\cap C(K)=R(K)$.

即. 任意の $f\in C(K)$ に対し，ある $\{f_n\}\subset R(K)$，有界列が存在して $f_n(q)\to f(q)$ a.e. $q\in Q$ ならば $f\in R(K)$ である。

今 ∂K 上の non-peak point の集合を Q' とし $\sigma=\mu+\lambda_{Q'}$ とするとき次が成立する。証明はほぼ定理3.14と同じである。

定理4.6. 任意の $\rho\in R(K)^\perp$，但し ρ は ∂K 上の測度とすると，ρ は $P_\sigma(1)$ をもつ。

参考文献

1. A. Browder, Introduction to Function Algebras, W. A. Benjamin, Inc., 1969.

2. A. M. Davie, Bounded approximation and Dirichlet sets, J. Functional Anal. 6 (1970), 460–467.

3. ________, Bounded limits of analytic functions, P. A. M. S., 32 (1972), 127–133.

4. A. M. Davie, T. W. Gamelin and J. Garnett, Distance estimates and pointwise bounded density, T. A. M. S., 175 (1973), 37–68.

5. T. W. Gamelin, Uniform Algebras, Prentice Hall, 1969.

6. T. W. Gamelin and J. Garnett, Constructive techniques in rational approximation, T. A. M. S. 143 (1969), 187–200.

7. ________, Bounded approximation by rational functions, Pacif. J. Math. 45 (1973), 129–150.

8. 大津賀 信, 函数論特論, 現代数学講座 9, 共立出版, 1957.