数理解析研究所講究録
206巻 1974年 15-29

Banach Function Algebra の real parts について。

早大 理工 田中純一

§1. 序

A_0を disk algebra, 即ち 複素平面の単位円周上で定義された, 複素数値連続函数で, その内部に analytic に拡張できるものの全体, とすると $f \in A_0$ に対して f の実数部分, $\mathrm{Re} f$ は単位閉円板上で連続, 開円板上では harmonic conjugate をもつ harmonic function となっている。一般の function algebra に関しても $\mathrm{Re}A = \{\mathrm{Re} f ; f \in A\}$ は harmonic conjugate をもつ, harmonic function の族としての抽象性をもつ。そのような所から $\mathrm{Re}A$ に関する多くの研究がなされているが, ここでは特に Hoffman-Wermer の定理, Wermer の定理から派生したことを論じ, いくつかの定理の拡張を試みる。尚この報告を記すにあたり, 多くの助言をして下さった 和田淳蔵先生に感謝致します。

§ 2. closed 性に関する定理について。

Aを compact Hausdorff 空間X上の function algebra とするとき Re A が $C_R(X)$ で closed とすれば $A=C(X)$ となる，という Hoffman-Wermer の定理はよく知ている。この定理は function algebra に関して二方向へ拡張された。一つは essential set との関連性を考えた方向で，Glicksberg-Wada([9],[14]) による，次の定理である。

<u>定理 W_1</u> AをX上の function algebra とする。今 $C(X)$ の closed subspace N，closed ideal I が $A+\bar{I}\supset N\supset I$ となっているとする。この時 $N+\bar{I}$ が closed とすれば $I=\bar{I}$ となる。

<u>定理 W_2</u> A,X，を定理 W_1 と同様とする。Aの closed subspace N，closed ideal I があり，$N\cap I$ がAの ideal，となったとする。この時 $N+\bar{I}$ が closed とすれば，$N\cap I=\overline{N\cap I}$。

<u>定理 W_3</u> A,X，を定理 W_1 と同様とする。Aの closed ideal I,J が $I+\bar{J}$ が closed となったとすると $I\cap J=\overline{I\cap J}$。

これらの定理は X が metric という条件下で類似の結果が Glicksberg によって得られている。

もう一つの方向は，interplation set との関連性を考えたもので Sidney-Stout，Bernard，([13][2]) による。

<u>定理 S-S</u> AをX上の function algebra とする．$X\supset E$

を closed set とするとき $\mathrm{Re}\,A|E$ が $C_R(E)$ で closed となれば E は A の interpolation set である。

<u>定理 Be_1</u> A を X 上の Banach function algebra とする。$\mathrm{Re}\,A$ が uniformly closed となれば $A = C(X)$。

定理 Be_1 は明らかに定理 S-S の拡張となっているが，又調和解析へのいくつかの応用がなされた。

最近，Saeki [17] によってこれらの拡張となっている，次の定理 $S_1 \sim S_3$ が得られた。

<u>定理 S_1</u> X を locally compact Hausdorff space，A を $C_0(X)$ 内の Banach algebra，I を A の closed subalgebra とする。今次の仮定をみたしているとする。

$$I \cdot A_R \subset I, \quad [\mathrm{Re}\,I] \subset A + \bar{A},$$

このとき $[I] = [\bar{I}]$ となる。とくに $A \cap \bar{A}$ が A で closed とすれば I は uniformly closed となる。ただし A_R は A にふくまれる実数値函数の全体，[ ] は uniform closure。

<u>定理 S_2</u> 記号，及び A, X を定理 S_1 と同様とする。A の subalgebra I で，次の仮定をみたすものがあったとする。

$$I \cdot A_R \subset I, \quad [\mathrm{Re}\,I] \subset A + \bar{A} \quad A \subset [I]$$

このとき A は uniformly closed となり $A = \bar{A}$ となる。

<u>定理 S_3</u> X, A, I を定理 S_1 のものとする。

$$I \cdot A_R \subset I, \quad [\mathrm{Re}\,I] \subset A + \bar{I}$$

が成立しているとすれば，I は uniformly closed で $\bar{I}=I$ となる。

これが一応 closed 性に関する主なものの経過である。又 Hoffman-Wermer の定理の直接の拡張として，Arenson [1] によるものがあるが，次にこの結果を一般の Banach function algebra の場合に拡張し，それに帰着させておのおのの定理を証明する。Arenson の結果の証明はまだ示されていない。

次の記号を導入する。今 X を compact Hausdorff space，A を C(X) の subalgebra とする。$X \ni x, y$ に対して，

$$(1) \qquad d(x,y) = \sup\{|f(x)|\ ;\ f(y)=0,\ f\in A,\ \|f\|_\infty \leq 1\}.$$

又 $X \supset F$ なる subset に対して F の直径，$D_A(F)$ を

$$(2) \qquad D_A(F) = \sup\{d(x,y)\ ;\ x, y \in F\}$$

明らかに $0 \leq d(x,y),\ D_A(F) \leq 1$ となっている。又 $K(A)$ は A による Šilov 分解，[ ] は uniform closure，とする。

<u>定理1</u>　A_2 を C(X) にふくまれる Banach algebra で A_1 を A_2 の subalgebra とする。今 $[\mathrm{Re}\,A_1] \subset \mathrm{Re}\,A_2$ が成立しているならば $1 > {}^{\exists}C \geq 0$ なる定数があり，

$$(*) \qquad D_{A_1}(K) \leq C \qquad {}^{\forall}K \in K(A_2) \qquad \text{となる。}$$

逆に (*) が成立しているとすれば $[\mathrm{Re}\,A_1] \subset \mathrm{Re}[A_2]$ となる。

<u>系2</u>　定理1と同様の仮定が成立し，更に $K(A_2)$ が有限

とすれば $D_{A_1}(K)=0$，即ち $A_1|K\subset\{\text{constants}\}$ が任意の K に対して成立する。特に A_2 が antisymmetric ならば $A_1=\{\text{constants}\}$ or $\{0\}$ となる。

定理の証明に入る前に次の補題を述べる。

補題3. 任意の正の数λに対して，適当な $\varepsilon>0$，と多項式 P とが存在して，P は開円板 $\{z\in\mathbb{C};|z|<1+\varepsilon\}$ を $|\mathrm{Re}\,z|<1$ の中へ移し $P(0)=0$ $\mathrm{Im}\,P(1)>\lambda$ とできる。

証明は略，c.f Burkel [7]

〈定理1 の証明〉 以後 $\|\ \|_{A_2}$ は A_2 の norm，$\|\ \|_\infty$ は一様 norm とする。今 $\mathrm{Re}\,A_2\ni u$，に対して

$$N(u)=\inf\{\|f\|_{A_2};\ f\in A_2\ \ \mathrm{Re}f=u\}$$

という norm をあたえると $\mathrm{Re}\,A_2$ は Banach space となる。$A_2\ni f$ に対して $\mathrm{Re}f=u$ とおくと

$$\|u\|_\infty\le\|f\|_\infty\le\|f\|_{A_2}$$

が成立することより $\|u\|_\infty\le N(u)$ となっている。仮定より $[\mathrm{Re}\,A_1]\subset\mathrm{Re}\,A_2$ 又 $\|u\|_\infty\le N(u)$ $(u\in[\mathrm{Re}\,A_1])$ から closed graph theorem を用いて，$[\mathrm{Re}\,A_1]$ 上では $\|\cdot\|_\infty$ と $N(\cdot)$ の二つの norm が同値となる。即ち次が成立する。

(P) $\left[\begin{array}{l}\exists K>0 \text{ なる定数が定まり}\\ \qquad\|u\|\le N(u)\le K\|u\|_\infty\quad\forall u\in[\mathrm{Re}\,A_1]\end{array}\right.$

次に $\lambda=2K+3$ とおいて補題3 による多項式 P，$\varepsilon>0$，を定

めておく。 $\leftarrow\cdots\cdots$ (A)

定理の結論を否定して $\forall\delta>0$ に対して ${}^\exists K_\delta\in K(A_2)$ があり $D_{A_1}(K_\delta)>1-\delta$ と仮定する。この仮定より $D_{A_1}(K_\delta)$ の定義(2)から $A_1\ni{}^\exists g$ で $\|g\|_\infty\le 1$, $K_\delta\ni{}^\exists x_1, {}^\exists x_2$ に対して, $g(x_1)=0$ $|g(x_2)|>1-\delta$ となる g が存在する。次に(A)における ε に対して $1-(1+\varepsilon/2)^{-1}>\delta$ なる δ を定めておき, これによって得られる g に対して $\tilde{g}=g/g(x_2)$ とする。

$\tilde{g}$ は次の性質をもつ。

$$\tilde{g}\in A_1,\quad \|\tilde{g}\|_\infty\le \varepsilon/2+1,\quad \tilde{g}(x_1)=0,\quad \tilde{g}(x_2)=1$$

今(A)における P に対して $f=P\circ\tilde{g}$ とおくと f は次の性質をもつ。

$$f\in A_1,\quad \|\mathrm{Re}f\|_\infty\le 1,\quad \mathrm{Im}f(x_2)>2K+3.\ f(x_1)=0$$

$\mathrm{Re}f$ に対して (P) を適用すれば $C_R(X)\ni\exists v$ に対して, $\mathrm{Re}f+iv\in A$, 及び次の式をみたすようにできる。

$$\|\mathrm{Re}f+iv\|_\infty\le (K+1)\|\mathrm{Re}f\|_\infty\le K+1.$$

ここで $F=-i(f-(\mathrm{Re}f+iv))$ とおくと F は A_2 に入り, 実数値をとる。だから F は K_δ 上で定数となっているはずである。一方 $f(x_1)=0$ より $F(x_1)=-v(x_1)$ から

(1) $|F(x_1)|=|v(x_1)|\le\|v\|_\infty\le\|\mathrm{Re}f+iv\|_\infty\le K+1.$

(2) $|F(x_2)|=|\mathrm{Im}f(x_2)|-|v(x_2)|\ge(2K+3)-|v(x_2)|$

$\ge(2K+3)-(K+1)=K+2.$

$K_\delta \ni x_1, x_2$ だから F は K_δ 上で non constant となり，不合理となる。

この定理の逆は少し長いので概略を示すにとどめる。
$K(A_2)$ と $K([A_2])$ の分解は一致するとはかぎらないが，$K([A_2])$ の方が細かい。だから A_2 をはじめから uniformly closed と考えてもよい。

次の二つの補題が示される。

<u>補題4</u>　$K(A_2) \supset \{K_\alpha\}$，$X \supset E, F$ なる closed set に対して次のことが成立しているとする。

$$E \subset \bigcup_\alpha K_\alpha \ , \quad E \cap K_\alpha \neq \phi \ (\forall \alpha) \ , \quad \bigcup_\alpha K_\alpha \cap F = \phi .$$

このとき $A_{2R} \ni f$ で次の性質をみたすものがある。

$$0 \le f \le 1 \ , \quad f \equiv 1 \text{ on } \bigcup_\alpha K_\alpha \ , \quad f = 0 \text{ on } F .$$

<u>補題5</u>　$v \in C_R(X)$ に対して次のことが示される

$$\inf\{\|v+g\|_\infty ; g \in A_{2R}\} = \sup\left\{\frac{|v(x)-v(y)|}{2} ; x, y \in K \ K \in K(A_2)\right\}$$

これら二つの補題と，函数論の初等的な定理から，$Re A_1$ 上で $\| \ \|_\infty$ と $N(\cdot)$ が同値となることが示される。だから $Re A_2$ が $N(\cdot)$ で Banach space となっていることから示される。

次に定理 S_1 の証明を考えてみる。次の補題が Glicksberg [8] による Bishop の定理の証明とほとんど同様に示される。

<u>補題6</u>.　$C(X)$ 内の uniformly closed subspace I と，$C(X) \supset S$

について $I\cdot S \subset I$ となっているとする。$\tilde{K}(S)$ を S による maximal antisymmetric 分解とすれば，$C(X) \ni f$ が $\tilde{K}(S) \ni K$ について $f|K \in I|K$ となるとき $f \in I$ となる。

〈定理 S_1 の証明〉 X を compact 空間 A を $C(X)$ 内の Banach subalgebra と考えてもよい。

$[\mathrm{Re}\, I] \subset \mathrm{Re}\, A$ より $D_I(K) \leq c$, $(0 \leq {}^\exists c < 1)$ が全ての K について成立する。次に $I \cdot A_R \subset I$ という性質，及び $K(A) \ni K$ は p-set で そのおのおのの peak set は peaking function を A_R にとるようにできる。このことより $D_I(K) > 0$ とはなり得ないことが示され，$I|K \subset \{\text{constants}\}$ となり 補題6 を $[I]$ に適用すれば $[I] = \overline{[I]}$ となる。

後半を示すのに I が A で closed となることが必要だが前半には必要としないこともわかる。

次に定理 Be_1 の証明を考えてみる。$A \cdot A_R \subset A$ はつねに成立することから 前と同様にして $A|K \subset \{\text{constants}\}$ がでる一方，A は Banach function algebra より二点を分離しているから $K(A) \ni {}^\forall K$ は一点，つまり A_R が X 上の点を分離している。このことより Hoffman-Wermer の定理はただちにで，$\mathrm{Re}\, A \subset \mathrm{Re}\, [A] \subset [\mathrm{Re}\, A] = \mathrm{Re}\, A$ より $[A] = C(X)$ となる。だから [2] の後半と同様に次の補題を用いて示される。

<u>補題 B_2</u>　E, F, が実 or 複素 normed linear space, で

$E \subset F$, $E \overset{\subset}{\to} F$ (bounded) とする。$\tilde{E} = l_\infty(N, E)$ 又 $\tilde{F} = l_\infty(N, F)$ とおくのとき $\tilde{E} \subset \tilde{F}$ となるが E が完備で $\tilde{E}$ が $\tilde{F}$ で dense とすれば $E = F$ となる。

§3. ring 性に関する定理について。

Wermer [18] は次の定理を示した。

<u>定理1</u> A を X 上の function algebra とする。このとき $\mathrm{Re}A$ が ring となれば $A = C(X)$ となる。

ring 性に関する定理は closed 性に比べると少いが，最近，Bernard によっていくつかの結果が得られた。又 ring 性と closed 性の関係についても詳しくは知られていない。ここでは Bernard による結果の紹介と function algebra に関する定理を考える。まず ultraseparating の定義を与える。

<u>定義</u> A を $C(X)$ 内の real or complex normed linear space とする。又 $A \overset{\subset}{\to} C(X)$ (bounded) とする。A が ultraseparating とは $\tilde{A} = l_\infty(N, A) \subset l_\infty(N, C(X)) = C(\overline{N \times X})$ となることから，$\tilde{A}$ が $\overline{N \times X}$ の二点を分離するときをいう。$\overline{N \times X}$ は Stone-Cech の compact 化。

ultraseparating に関しては次の性質が知られている。

<u>補題</u> A が X 上の function algebra で Dirichlet とすれば A は ultraseparating となる。

このことを用いて Bernard [4] は次のように Wermer の定理を一般の Banach function algebra の場合へ拡張した。

<u>定理 Be_3</u>　A を X 上の Banach function algebra で ultraseparating とする。ReA が ring となれば $A=C(X)$ 。

前の補題と Stone-Weierstrass の定理より，ただちに 定理 1 が示される。次にこの定理の略証を示す。次の補題が示される。

<u>補題 Be_4</u>　A B を C(X) 内の Banach algebra で A は ultraseparating，$1\in A\subset B$　$B=\overline{B}$ とすれば $B=C(X)$。

〈定理 Be の証明〉 $B=\mathrm{Re}A+i\mathrm{Re}A$ とおく。$\mathrm{Re}A\ni u$ に対して $N(u)=\inf\{\|f\|_A ; f\in A\ \ \mathrm{Re}f=u\}$ という norm を与え B 内の $u+iv$ に対して $N(u+iv)=N(u)+V(v)$ とする。そして $\|u+iv\|_B=\sup_\theta N(e^{i\theta}(u+iv))$ ととれば 補題 Be から $B=C(X)$ が示され $\mathrm{Re}A=\mathrm{Re}B=C_R(X)$ となることより $A=C(X)$ となる。

次に証明なしに 定理 Be_3 の拡張を示す。これはあとでいくつかの応用を生む。

<u>定義</u>　X を位相空間，$A\subset C(X)$，$S\subset R$ とする。φ を S から R への函数とするとき，

(1)　φ が operates in A とは $A\ni f$ で $f(X)\subset S$ となるものに対して $\varphi\circ f\in A$ となること。

(2) Aが normed space のとき φが operates boundedly in A とは $\forall \varepsilon > 0$ に対して $\exists M(\varepsilon) > 0$ が定まり, $A \ni f$ で $f(X) \subset S$ $\|f\|_A \leq \varepsilon$ となるものに対して $\varphi \circ f \in A$ $\|\varphi \circ f\|_A \leq M(\varepsilon)$ となること。

<u>定理B_{c5}</u> (Bernard [5]) AをX上の function algebra とする。今 non-affine continuous function が (Re A, V)に operates boundedly とすれば $A = C(X)$。

定理1は t^2 となっている特別な場合である。

次に function algebra の場合の§2の定理W_1-W_3 と類似の形に ring性の定理の拡張ができることを示す。ultraseparating とよくにた仮定を入れて 一般の Banach function algebra の場合にも拡張できるが 一応 uniformly closed を仮定する。

<u>定理2</u> AをX上の function algebra とする。(separates points という仮定はのぞける。) $A \supset I$ を closed ideal とする。このとき $A \supset N$ なる closed subspace があり ($N \supset I$). $N + \bar{I}$ が ring となれば $I = \bar{I}$ となる。

<u>定理3</u> I, J を A の closed ideal とすれば $I + J$ が ring となるとき $I \cap J = \overline{I \cap J}$ となる。

いずれも Wermer の定理の拡張となっている。

〈定理2の証明〉 MをVによって generate される closed

subalgebra とする, $M \supset N \ni 1$ と仮定してよい。K を M の maximal antisymmetric set とすれば $I|_K, M|_K$, は $C(K)$ で uniformly closed となる。又 $(N+\bar{I})|_K$ も ring となるから その実数値函数全体 $(N|_K+\bar{I}|_K)_R$ も ring となる。簡単な計算から $(N|_K+\bar{I}|_K)_R = R+\mathrm{Re}\,I|_K$ だから $\mathrm{Re}(I+\mathbb{C})|_K$ は ring となっている。このことより Wermer の定理から $\mathrm{Re}(I|_K+\mathbb{C})$ は unifomly closed となり定理1の系2から $I|_K \subset$ {constants} となる。だから Bishop の定理から $I=\bar{I}$ となる。

定理3の証明も A の maximal antisymmetric set に対して同様のことを行うとよい。この定理から function algebra に関する essential set との関連性が, Wada[15]と同様に示される。

§4. ReA に関するその他の定理について。

さいごに, closed性や ring性を用いて得られるいくつかの, 結果を列挙しておく。

<u>定理Be6</u> (Bernard[3]) A, B を $C(X)$ 内の Banach algebra とし $A \subset B$, $\mathrm{Re}A=\mathrm{Re}B$ を仮定する。今次の (H_1) (H_2) のいずれかをみたせば $A=B$ となる。

(H_1) B は unifomly closed。

(H_2) A は unifomly closed. $B\cap\bar{B}$ は closed in B。

<u>定理Be₇</u> (Bernard[5]) A を function algebra とする。Re A が lattice となれば $A = C(X)$ となる。

この定理は Wilken の問に答えたもので 次の interpolation set に関する定理と関連する。

<u>定理Du</u> (Dufresnoy[11]) E, F を interpolation set とする。$E \cap F$ が peak set とすれば, $A|(E\cup F)$ は self adjoint で, $\mathrm{Re}\,A|(E\cup F)$ は lattice となる。

又最近 disk algebra の real parts に関して O'connel は次の定理を示した。証明は disk algebra そのものの性質を多数用いているが, ある程度一般化できるように思う。

<u>定理O</u> (O'Connel[19]) $\Gamma = \{|z|=1\}$ とおく。今 A_0 を disk algebra とするとき ある function algebra B が $\mathrm{Re}\,A_0 = \mathrm{Re}\,B$ となれば Γ から Γ への絶対連続な位相同型Φが存在して, $B = A(\Phi) = \{f(\Phi);\ f \in A\}$ と書ける。逆にΦが C^2 に属する Γ から Γ 上への位相同型で $\frac{d\Phi}{dt}(e^{it}) \neq 0$ が全ての点で成立すれば $\mathrm{Re}\,A(\Phi) = \mathrm{Re}\,A$ となる。

(注意) E.L. Arenson による[1]の詳しい証明が発表された。これによって §2 定理1 の逆の証明は少し意味がうすれる。しかしこの結果を ideal に応用してやることは気がついていないようだ。 c.f Siberian Math. J. Vol 13 (1973) 831,

Reference

[1] E. L. Arenson ; Certain properties of algebras of continuous functions. Dokl. Acad. Nauk SSSR 171 (1966) 767 – 769, Soviet math Dokl 7 (1966) 1522 – 1524.

[2] A. Bernard ; Une caractérization de C(X) parmi les algèbres de Banach, C, R, Acad. Sc. Paris 267 (1968) A 634 – 635

[3] ——— ; Comparison d'algèbres de fonctions à l'aid des partes réelles de leurs éléments, C. R. Acad. Sci. Paris Ser A-B 270 (1970) A 29 – A 32.

[4] ——— ; Algèbres ultraséparantes de fonctions, C. R. Acad Sci Paris, Sér A-B 270 (1970) A 818 – A 819.

[5] ——— ; Fonctions qui operent sur Re A C. R Acad Sci Paris. Sér A-B 271 (1970) A 1120 – 1121

[6] ——— ; Espace des parties réelles des èléments d'une algèbre de Banach de fonctions, J. Functional Analysis 10 (1972) 387 – 409.

[7] R. B Burkel ; Characterization of C(X) among its subalgebras, Lecture note in Pure and applied mathe. Marcel Dekker (1972)

[8] I. Glickesberg ; Measure orthogonal to algebras and sets of antisymmetry Trans. Amer. Math. Soc. 105 (1962) 415 – 435.

[9] ——— ; On two consequence of a theorem of Hoffman

Wermer, Math. Scand. 23 (1968) 188 -192.

[10] ———; Recent result on Function algebras, Amer. Math. Soc. Providence Rode Island (1971)

[11] A. Dufresnoy; Parties réelles de certains quotients d'algèbres uniform, C. R. Acad. Sci. Paris (to appear)

[12] K. Hoffman and J. Wermer; A characterization of C(X), Pacific J. Math. 12 (1962) 941 - 944

[13] S.J. Sidney and E.L stout; A note on interpolation, proc. Amer. Math. Soc. 19 (1968) 380 --382

[14] J. Wada; On a theorem of I. Glicksberg, Proc. Japan Acad. 48 (1972) 227–230.

[15] ——— ; Function algebra における実数部分の空間について。早大教育紀要 20 (1971) 29 - 35

[16] ——— ; Abstract harmonic function と integral representation; 京大数理解析研講究録 61 (1968)

[17] S. Saeki; On Banach Algebras of Continuous Functions. (Preprint)

[18] J. Wermer; the space of real parts of a function algebras pacific, J. Math 13 (1963) 1423 -- 1426

[19] J. M. F. Oconnell; Real parts of uniform algebras, Pacific J. Math. 46 (1973) 235 –247.