

Uniform algebra と
Bauer simplex について

阪大 基工 安西 一夫

§ 1. 序

Compact 凸集合の structure に関する研究は、詳細にはなされていゝる。それらの研究と関数環の研究とは、密接な関係がある。たとえば、関数環 A の state space $S(A)$ の closed face と generalized peak set との関係、facial topology による関数環の特徴づけはどが E. J. Ellis ([9]) によつて述べられていゝる。また、E. M. Alfsen と B. Hirsberg ([3]) は、dominated extension theorem を用いて、Bishop-Rudin-Coleson の定理の一般化をしていゝる。§ 3 で、 $C_{\mathbb{R}}(X)$ の closed subspace に関する J. E. Björk の定理の一般化である T. B. Andersen ([4]) の結果を紹介し、§ 4 で、Bauer simplex と関数環との関係を述べ、§ 5 で、関数環の tensor product について述べる。

§2. 定義

K を局所凸空間の compact 凸集合とし, K の extreme point の集合を exK とする。 K を適当に affine 変換したものを K' とし, $P \subseteq P = \{ \lambda x \mid \lambda \geq 0, x \in K' \}$ とするとき, $P - P$ が P の順序で vector 束になるとき, K を simplex といい。 simplex でかつ, exK が閉集合である K を Bauer simplex といい。 F が K の face であるとは, $\lambda x + (1-\lambda)y \in F$ となる $(\lambda, x, y) \in (0, 1] \times K \times K$ に対して, $x \in F$ となることである。 $F \cap F' = \emptyset$ となる K の face F' が存在して, $x \in K$ に対して, $x = \lambda y + (1-\lambda)z$ となる $(\lambda, y, z) \in [0, 1] \times F \times F'$ が唯一存在するとき, F を split face といい。 $x \in K$ とするとき, $face(x)$ は x を含む最小の face である。 $\alpha \geq 1$ に対して,

$$D_\alpha(x) = (\alpha x - (\alpha-1)K) \cap K \text{ とすると, } face(x) = \bigcup_{\alpha \geq 1} D_\alpha(x)$$

となる ([1])。 $x \approx y$ であるとは, $face(x) = face(y)$ となることである。 このとき, \approx は K 上の同値関係になる。

$face(x)$ を K の part といい。 $x \approx y$ であることと

$$\sup \{ \left| \log \frac{u(x)}{u(y)} \right| : u \in \mathcal{A}(K), u > 0 \} < \infty \text{ であることとは同値}$$

である。 ただし, $\mathcal{A}(K)$ は K 上の affine 連続関数の集合とする ([6])。 μ, ν を K 上の確率測度とするとき, $\nu > \mu$

$$\text{であるとは, 凸連続関数 } f \text{ に対して, } \int f d\nu \geq \int f d\mu \text{ となる}$$

ることである。この順序 \succ に関して、 μ が極大であるとき、 μ を maximal measure という。 K 上の測度 μ が boundary measure であるとは、 $\frac{|\mu|}{|\mu|(K)}$ が maximal measure となることである。 $x \in K$ に対して、 $f \in \mathcal{A}(K)$ ならば、 $f(x) = \int f d\mu$ となる確率測度 μ が存在する。この μ を x の representing measure といい、 x を μ の resultant といい ([5])。

定理 (Choquet-Meyer) K が simplex であることと、 $x \in K$ に対して、唯一つの x の maximal representing measure が存在することとは、同値である。

$f \in \mathcal{A}(K)$ ならば、 $\int f d\mu = 0$ となる K 上の測度 μ の集合を $\mathcal{A}(K)^\perp$ で表わす。 X を compact Hausdorff 空間とし、 $B(C_{\mathbb{R}}(X))$ を X 上の function space とし、 $\partial_B X$ を X の Choquet 境界とする。 $S(B) = \{f \in B^* \mid f(1) = 1 = \|f\|\}$ を B の state space としよう。 π を X から $S(B)$ への canonical map とし、 B から $\mathcal{A}(S(B))$ への写像 π を次のように定義する。 $f \in B$, $x \in S(B)$ に対して、 $\pi(f)(x) = \langle f, x \rangle$ とする。 A を X 上の実数環とし、 A の極大イデアル空間を $M(A)$ とする。 A が Dirichlet 環であるとは、 $\text{Re} A|_{\partial_A X}$ が $C_{\mathbb{R}}(\partial_A X)$ で稠密になることである。 \mathcal{Y} を X から $S(A)$ への canonical map とし、 $\overline{\text{Re} A}$ から $\mathcal{A}(S(A))$ への写像 ψ を次のように定義する。 $f \in A$, $h = \text{Re} f$, $x \in S(A)$ ならば、 $\psi(h)(x) = \text{Re} \langle f, x \rangle$ とする。

§ 3. *dominated extension theorem* について

この § で, T. B. Andersen による Björk の定理を拡張した結果 ([4] 定理 3) を紹介する。

定理 1. (Andersen) compact 凸集合 K の closed split face を F とする。

$$\phi < \psi \quad \phi|_F \leq a_0 \leq \psi|_F$$

をみたす K 上の実数値凸連続関数を ϕ とし, $\psi \in \mathcal{A}(K)$, $a_0 \in \mathcal{A}(F)$ とするとき,

$$\psi \leq a \leq \phi \quad a|_F = a_0$$

となる $a \in \mathcal{A}(K)$ が存在する。

この定理は, 値域が *approximation property* をもつ Banach 空間の場合にも成立することを, T. B. Andersen は [5] で述べている。

命題 2. (Andersen) K を compact 凸集合とし, F_0 を XK の閉部分集合とする。このとき, $\mu \in \mathcal{A}(K)^+$ とする boundary measure μ に対して, $\mu|_{F_0} \in \mathcal{A}(K)^+$ ならば, F_0 の閉凸包 $F = \overline{\text{conv}}[F_0]$ は split face になる。

上の命題は, E. M. Alfsen ([1]) による split face を測度により特性化した結果を使って証明している。次の定理は, X が距離空間でない場合の Björk の定理を証明している。

定理 3. (Andersen) X を compact Hausdorff 空間とし

B と X の点を分離し、定数関数を含む、 $C_{\mathbb{R}}(X)$ の閉部分空間とする。 F_0 が

$$\mu \in M(\partial_B X) \cap B^+ \quad \text{ならば} \quad \mu|_{F_0} \in B^+$$

とみなす B に関する Choquet 境界 $\partial_B X$ の compact 部分集合ならば、 $\phi_0 \in B|_{F_0}$ に対して

$$\phi|_{F_0} = \phi_0. \quad \|\phi\|_X = \|\phi_0\|_{F_0}$$

となる $\phi \in B$ が存在する。

証明 最初に、 $\Psi(F_0)$ の閉凸包 F が $S(B)$ の split face であることを示す。 $\Psi(F_0) \subseteq \mathcal{L}X S(B)$ より、命題 2 によつて、 $\mu \in \mathcal{A}(S(B))^{\perp}$ である boundary measure μ に対して、 $\mu|_{\Psi(F_0)} \in \mathcal{A}(S(B))^{\perp}$ を示せばよい。もし、 $\phi \in B$ ならば、

$$\int_X \phi d\mu \circ \Psi^{-1} = \int_{\Psi(X)} \phi \circ \Psi^{-1} d\mu = \int_{\Psi(X)} \Psi(\phi) d\mu = \int_{S(B)} \Psi(\phi) d\mu = 0$$

よつて、 $\mu \circ \Psi \in B^+$ 。 $\mu \circ \Psi \in M(\partial_B X)$ より、 $\mu \circ \Psi|_{F_0} \in B^+$ 。もし $a \in \mathcal{A}(S(B))$ ならば、 $\Psi^{-1}(a) \in B$ とはなる。ゆえに、

$$0 = \int_{F_0} \Psi^{-1}(a) d\mu \circ \Psi = \int_{\Psi(F_0)} \Psi^{-1}(a) \circ \Psi^{-1} d\mu = \int_{\Psi(F_0)} a d\mu.$$

よつて、 F は split face である。次に、 $\phi_1|_{F_0} = \phi_0$ とはなる $\phi_1 \in B$ に対して、 $\Psi(\phi_1) \in \mathcal{A}(S(B))$ 。定理 1 より、

$$C|_F = \Psi(\phi_1)|_F, \quad \|C\|_{S(B)} = \|\Psi(\phi_1)\|_F$$

となる $C \in \mathcal{A}(S(B))$ が存在する。 $\|C\|_{S(B)} = \|C\|_{\mathcal{L}X S(B)}$ より、

$$\begin{aligned} \|\Psi^{-1}(C)\|_X &= \|C\|_{\Psi(X)} = \|C\|_{S(B)} = \|\Psi(\phi_1)\|_F = \|\Psi(\phi_1)\|_{\Psi(F_0)} \\ &= \|\phi_1 \circ \Psi^{-1}\|_{\Psi(F_0)} = \|\phi_1\|_{F_0} \end{aligned}$$

$\phi = \Psi^{-1}(C)$ とおくとよい。

§4. Bauer simplex と Dirichlet 環

定理4. (Bauer) K を compact 凸集合とする。このとき、 K が Bauer simplex であるための必要十分条件は、 $\text{ex}K$ から \mathbb{R} への任意の連続関数 f に対して、 $\tilde{f}|_{\text{ex}K} = f$ であり、 $\|f\|_{\text{ex}K} = \|\tilde{f}\|_K$ となる $\tilde{f} \in \mathcal{A}(K)$ が存在することである。

この定理は、E.M. Alfsen ([2], Coro. 1) の結果を用いると次のように、容易に拡張できる。

命題A. K を compact 凸集合とし、 E を完備な実局所凸空間とする。このとき、 K が Bauer simplex となる必要十分条件は、 $\text{ex}K$ から E への任意の連続写像 f に対して、 $\tilde{f}|_{\text{ex}K} = f$ となる K から E への連続な affine 写像 \tilde{f} が存在することである。特に、 E が Banach 空間ならば、 $\|f\|_{\text{ex}K} = \|\tilde{f}\|_K$ となる。

証明 K を Bauer simplex とする。このとき $\text{ex}K$ は、閉集合であることより、 $f(\text{ex}K)$ は compact 集合となる。 E が完備であることより、 $f(\text{ex}K)$ の閉凸包は compact 凸集合となる。 K が Bauer simplex であることより、定理4により、 $\mu \in \mathcal{A}(K)^+$ となる boundary measure μ は、 $\mu = 0$ である。よって、[2] Coro 1. より、 $\tilde{f}|_{\text{ex}K} = f$ となる、 K から $\overline{\text{con}}[f(\text{ex}K)]$ への

affine 連続写像 \tilde{f} が存在する。 E が Banach 空間のとき、
 $\|f\|_{\text{ex}K} = \|\tilde{f}\|_K$ とはることはあきらかである。逆は、 E の
 部分空間 $E_0 = \{\lambda x \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ (ただし $x \neq 0, x \in E$) は \mathbb{R} に位相同型より、
 定理 4 より、 K は Bauer simplex とはる。

R. Fuhr と R. R. Phelps は [9] Coro. 6.3 で、 次の命題の
 必要条件が成立することを示している。

命題 B. A を compact Hausdorff 空間 X 上の関数環とする。
 このとき、 A が Dirichlet 環である必要十分条件は、 A の
 state space が Bauer simplex とはることである。

証明 A が Dirichlet 環ならば、 Choquet 境界 $\partial_A X$ は閉集
 合とはる。 $x \in K$ に対して、 $\mathcal{A}(S(A))$ に関する x の maximal
 representing measure を μ_1, μ_2 とすると、

$$\text{supp}(\mu_i) \subset \overline{\text{ex}S(A)} = \text{ex}S(A) = \mathcal{Y}(\partial_A X) \quad (i=1,2).$$

$\overline{\text{Re}A}|_{\partial_A X} = C_{\mathbb{R}}(\partial_A X)$ であることと、 $\mathcal{Y}(\text{Re}A) = \mathcal{A}(S(A))$ であるこ
 より、 $\mathcal{A}(S(A))|_{\text{ex}S(A)} = C_{\mathbb{R}}(\text{ex}S(A))$ 。よって、 $\mu_1 = \mu_2$ 。 Choquet-
 Meyer の定理より、 K は simplex とはる。逆は、 $f \in C_{\mathbb{R}}(\partial_A X)$
 に対して、 $f \circ \mathcal{Y}^{-1} \in C_{\mathbb{R}}(\text{ex}S(A))$ 。定理 4 より、 $h|_{\text{ex}S(A)} = f \circ \mathcal{Y}^{-1}$
 とはる $h \in \mathcal{A}(S(A))$ が存在する。よって、 $\mathcal{Y}^{-1}(h) \in \overline{\text{Re}A}$ とはり、
 A は Dirichlet 環とはる。

上の命題より、 Fuhr, Phelps [10] Prop 6.4 はあきらかであ
 る。

§ 5. 関数環の tensor product について

K_1, K_2 を局所凸空間 E_1, E_2 の compact 凸集合とする。

$\mathcal{BA}(K_1 \times K_2)$ を積空間 $K_1 \times K_2$ 上の連続な *bi*affine 関数よりなる空間とする。norm は uniform norm とする。 $\mathcal{BA}(K_1 \times K_2)$ の state space を $K_1 \otimes K_2$ とあらわす。 $f_1 \in \mathcal{A}(K_1), f_2 \in \mathcal{A}(K_2)$ に対して, $f_1 \otimes f_2 \in \mathcal{BA}(K_1 \times K_2)$ を次のように定義する。 $(x, y) \in K_1 \times K_2$ に対して, $f_1 \otimes f_2(x, y) = f_1(x)f_2(y)$ 。 $K_1 \times K_2$ から $K_1 \otimes K_2$ の中への *bi*affine 連続写像 w を次のように定義する。 $a \in \mathcal{BA}(K_1 \times K_2)$ に対して, $w(x, y)(a) = a(x, y)$ とする。 A_i を X_i 上の関数環とする ($i=1, 2$)。 $A_1 \otimes A_2$ を A_1, A_2 の algebraic tensor 積とする。 $A_1 \otimes A_2$ は, $A_1 \otimes A_2$ を uniform norm により完備化したものである。 K_1, K_2 を A_1, A_2 の state space とし, K を $A_1 \otimes A_2$ の state space とする。 $\mathcal{R}_e(A_1 \otimes A_2)$ から $\mathcal{BA}(K_1 \times K_2)$ の中への線型写像 \mathbb{I}_0 を次のように定義する。 $(x, y) \in K_1 \times K_2, f_1, f_2 \in A_1, g_1, g_2 \in A_2$ に対して,

$$\mathbb{I}_0(f_1, g_1 - f_2, g_2) = \langle f_1, x \rangle \langle g_1, y \rangle - \langle f_2, x \rangle \langle g_2, y \rangle$$

とすると, \mathbb{I}_0 は連続写像になる。よって, $\overline{\mathcal{R}_e(A_1 \otimes A_2)}$ まで拡張できる。 \mathbb{I}_0^* を $\mathcal{BA}(K_1 \times K_2)^*$ から $(\overline{\mathcal{R}_e(A_1 \otimes A_2)})^*$ への連続線型写像とする。

関数環 A が u.r.m. であるとは, $x \in M(A)$ に対して, x の maximal representing measure が唯一存在することである。

3. *logmodular* 環, *Dirichlet* 環は u. r. m. である。

命題を述べる前に *tensor product* に関する定理を紹介す

3.

定理 5. (Namioka-Phelps, Lazar) $K_1 \otimes K_2$ が Bauer simplex であるための必要十分条件は, K_1, K_2 が Bauer simplex となることである。

この定理の十分条件は, A. Lazar [2] により示され, 必要条件は, I. Namioka と R. R. Phelps [14] が示した。

定理 6. (Namioka-Phelps [14] Th. 2.3) $K_1 \otimes K_2$ の extreme point の集合は $w(\text{ex} K_1 \times \text{ex} K_2)$ に等しい。

定理 7. (Mochizuki [13] Th. 1) $A_1 \hat{\otimes} A_2$ に関する Choquet 境界 $\partial_{A_1 \hat{\otimes} A_2} X_1 \times X_2$ は $\partial_{A_1} X_1 \times \partial_{A_2} X_2$ に等しい。

定理 8. (Mochizuki [13] Th. 2) $A_1 \hat{\otimes} A_2$ の極大イデアル空間 $M(A_1 \hat{\otimes} A_2)$ は, $M(A_1) \times M(A_2)$ に等しい。

定理 6 と定理 7 より, $\text{Ex}^*(\text{ex}(K_1 \otimes K_2)) = \text{ex} K = \mathcal{Y}(\partial_{A_1} X \times \partial_{A_2} X)$ となることがわかる。

命題 C. A_1, A_2 をそれぞれ compact Hausdorff 空間 X_1, X_2 上の関数環とする。

(i) $A_1 \hat{\otimes} A_2$ が *Dirichlet* 環である。

(ii) $A_1 = C(X_1)$ または, $A_2 = C(X_2)$ 。

(i) または (ii) のどちらかの条件が成り立つならば, K と $K_1 \otimes K_2$ は

affine 位相同型になる。

証明 (i) が成りたつとする。まず $K_1 \otimes K_2$ が Bauer simplex になることを示す。上の注意より, $f \in C_{\mathbb{R}}(\text{ex}(K_1 \otimes K_2))$ に対し, $f \circ \pi_0^* \in C_{\mathbb{R}}(\text{ex} K)$ 。命題 B と定理 4 より, $\tilde{f}|_{\text{ex} K} = f \circ \pi_0^*$ とある $\tilde{f} \in \mathcal{A}(K)$ が存在する。ゆえに, $\tilde{f} \circ \pi_0^* \in \mathcal{A}(K_1 \otimes K_2)$ 。 $\tilde{f} \circ \pi_0^* = \tilde{f}$ とおくと,

$$\tilde{f}|_{\text{ex}(K_1 \otimes K_2)} = f, \quad \|\tilde{f}\|_{K_1 \otimes K_2} = \|f\|_{\text{ex}(K_1 \otimes K_2)}$$

よ, て, 定理 4 より, $K_1 \otimes K_2$ は Bauer simplex となる。次に π_0^* が, 1 対 1 であることを示す。 $z_1 \neq z_2 \in K_1 \otimes K_2$ ならば,

Choquet - Menger の定理より, z_i の maximal representing measure μ_i が唯一存在する ($i=1, 2$)。 $\mu_1 \neq \mu_2$ であることより $\int f d\mu_1 \circ \pi_0^{*-1} \neq \int f d\mu_2 \circ \pi_0^{*-1}$ とある $f \in C(\text{ex} K)$ が存在する。よって, $\tilde{f}|_{\text{ex} K} = f$ とある $\tilde{f} \in \mathcal{A}(K)$ が存在する。

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\pi_0^*(z_1)) &= \int \tilde{f} d\mu_1 \circ \pi_0^{*-1} = \int_{\text{ex} K} f d\mu_1 \circ \pi_0^{*-1} \neq \int_{\text{ex} K} f d\mu_2 \circ \pi_0^{*-1} \\ &= \int \tilde{f} d\mu_2 \circ \pi_0^{*-1} = \tilde{f}(\pi_0^*(z_2)) \end{aligned}$$

ゆえに, π_0^* は 1 対 1 となる。

(ii) も $A_1 = C(X_1)$ ならば, $\text{Re} A_1 = C_{\mathbb{R}}(X_1)$ となる。ゆえに, $\overline{\text{Re}(A_1 \hat{\otimes} A_2)} = \overline{\text{Re} A_1 \otimes \text{Re} A_2}$ 。 $S(A_1)$ が Bauer simplex より, $\mathcal{A}(S(A_1)) \otimes \mathcal{A}(S(A_2))$ が $\beta\mathcal{A}(S(A_1) \times S(A_2))$ で稠密とあることかわかる (cf, [14])。よ, て π_0^* は位相同型になる。

系 A_1, A_2 を Dirichlet 環とする。このとき, $A_1 \hat{\otimes} A_2$ が Dirichlet 環である必要十分条件は, K と $K_1 \hat{\otimes} K_2$ が affine 位相同型になることである。

上の命題と定理 5 より $A_1 \hat{\otimes} A_2$ が Dirichlet 環ならば, A_1, A_2 が Dirichlet 環になることがわかる (cf. [13])。また, 次の補題は N. Mochizuki [13] Lemma. 3 の state space λ の拡張になっている。 η を $\mathbb{R}^* \cdot \omega$ とする。

補題 P_i を K_i の part とする ($i=1, 2$)。このとき, $\eta(P_1 \times P_2)$ は K の part に含まれる。

証明 $x_1, y_1 \in K_1, x_2, y_2 \in K_2$ とするとき, $x_1 \approx y_1, x_2 \approx y_2$ となることと $\eta(x_1, x_2) \approx \eta(y_1, y_2)$ となることが同値であることを示す。 $\eta(x_1, x_2) \approx \eta(y_1, y_2)$ ならば, $x_1 \in \mathcal{A}(K_1), x_2 \in \mathcal{A}(K_2)$ に対して, $x_1 \otimes 1, 1 \otimes x_2 \in \beta \mathcal{A}(K_1, K_2)$ となることより $x_1 \approx y_1, x_2 \approx y_2$ となる。逆は, $\text{face}(\eta(x_1, x_2)) = \text{face}(\eta(y_1, x_2)), \text{face}(\eta(y_1, x_2)) = \text{face}(\eta(y_1, y_2))$ を示せばよい。 $\alpha \geq \beta \geq 1$ ならば, $D_\alpha(\eta(x_1, x_2)) \supset D_\beta(\eta(y_1, y_2))$ となることより, $z \in \text{face}(\eta(x_1, x_2))$ ならば,

$$z = \alpha(\eta(x_1, x_2)) - (\alpha-1)z_1, \quad x_1 = \alpha y_1 - (\alpha-1)x$$

となる $\alpha \geq 1, z_1 \in K, x \in K_1$ が存在する。ゆえに,

$$z = \alpha^2(\eta(y_1, x_2)) - (\alpha^2-1)\left\{\frac{\alpha}{\alpha+1}\eta(x, x_2) + \frac{1}{\alpha+1}z_1\right\}$$

$\frac{\alpha}{\alpha+1}\eta(x, x_2) + \frac{1}{\alpha+1}z_1 \in K$ より, $z \in \text{face}(\eta(y_1, x_2))$ 。よって,

$$\text{face}(\eta(x_1, x_2)) \subset \text{face}(\eta(y_1, x_2))。$$

同様にすると,

$$\text{face}(\mathcal{P}(x_1, x_2)) \supset \text{face}(\mathcal{P}(y_1, y_2)).$$

命題 D $A_1 \otimes A_2$ が u.r.m. ならば, A_1 または, A_2 は non-trivial Gleason part をもたない。

証明 P_1 を A_1 の non-trivial Gleason part と仮定する。このとき, もし, A_2 の non-trivial Gleason part P_2 が存在するならば, $P = \mathcal{P}(P_1 \times P_2)$ は, 補題より $M(A_1 \otimes A_2)$ の Gleason part となる。一方, 仮定と定理 8 より, A_1, A_2 は u.r.m. となる。ゆえに, Wermer の定理より, $(P_1, d_1), (P_2, d_2), (\mathcal{P}(P_1 \times P_2), d)$ は単位開円板 D と位相同型になる, ただし, d_1, d_2, d をそれぞれ P_1, P_2, P の part metric とする。その同型写像をそれぞれ τ_1, τ_2, τ とする。また, $\mathcal{P}(x_1, x_2), \mathcal{P}(y_1, y_2) \in P$ に対し z ,

$$\begin{aligned} d(\mathcal{P}(x_1, x_2), \mathcal{P}(y_1, y_2)) &= \sup\{|\log\langle u, \mathcal{P}(x_1, x_2) \rangle - \log\langle u, \mathcal{P}(y_1, y_2) \rangle|; u \in \text{Re}(A_1 \otimes A_2), \|u\| < 1\} \\ &\geq \sup\{|\log\langle u \otimes 1, \mathcal{P}(x_1, x_2) \rangle - \log\langle u \otimes 1, \mathcal{P}(y_1, y_2) \rangle|; u_1 \in \text{Re} A_1, \|u_1\| < 1\} \\ &= \sup\{|\log\langle u_1, x_1 \rangle - \log\langle u_1, y_1 \rangle|; u_1 \in \text{Re} A_1, \|u_1\| < 1\} \\ &= d_1(x_1, y_1) \end{aligned}$$

となることより, $zd \geq d_1 + d_2$ となり, $(\tau_1^{-1} \times \tau_2^{-1}) \circ \tau$ は D から $D \times D$ の上への 1 対 1 連続写像となり, $z > 1$ である。よって矛盾となり, P_2 は trivial part とならなければならない。

B. Cole ([8]) と R. F. Basener ([6]) は全ての part が trivial

part である。ここで、 $C(X)$ と異なる関数環の例とあげておく。D.R. Wilkin ([17]) は、 X が \mathbb{C} の compact 部分集合の場合に、 $R(X)$ に対しては、全ての part が trivial part なるは、 $R(X) = C(X)$ となることを示した。Dirichlet 環の場合に $R(X)$ と同様のことが成り立つかどうかは一般にはわからぬ。もし、成り立つかば、 $A_1 \otimes A_2$ が Dirichlet 環であるとき、 $A_1 = C(X_1)$ または、 $A_2 = C(X_2)$ にかきられることが上の命題よりわかる。

References

1. E.M. Alfsen; Compact convex sets and boundary integrals. Springer Verlag Berlin. (1971).
2. E.M. Alfsen; On the Dirichlet problem of the Choquet boundary. Acta Math., 120 (1968) 149-159.
3. E.M. Alfsen and B. Hirsberg, On dominated extentions in linear subspaces of $C(X)$, Pacific J. of Math. 36 (1971) 567-584.
4. T.B. Andersen, On dominated extention of continuous affine function on split faces, Math. Scand. 29 (1971) 298-306.
5. T.B. Andersen, On Banach space valued extentions from split faces, Pacific J. of Math. 42 (1972) 1-9.
6. R.F. Basener; An example concerning peak points. Notices Amer. Math. Soc., 18 (1971) 415-416.
7. H.S. Bear; Lectures on Gleason Parts. Springer-Verlag Berlin, 1970.

8. B. Cole; One point parts and the peak point conjecture. Ph.D. dissertation, Yale University, 1968.
9. E.J. Ellis, On split faces and function algebras, Math. Ann. 195 (1972) 159-166.
10. R. Fuhr and R.R. Phelps; Uniqueness of complex representing measures on the Choquet boundary, J. Functional Analysis, 14 (1973) 1-27.
11. K. Hoffman; Analytic functions and logmodular Banach algebras. Acta Math., 108 (1962) 271-317.
12. A. Lazar, Affine products of simplexes, Math. Scand., 22 (1968) 165-175.
13. N. Mochizuki; The tensor product of function algebras. Tohoku Math. J., 17 (1965) 139-146.
14. I. Namioka and R.R. Phelps; Tensor products of compact convex sets. Pacific J. Math., 13 (1969) 469-480.
15. R.R. Phelps; Lectures on Choquet's theorem, Math. Studies Princeton (1966).
16. E.L. Stout; The theory of uniform algebras. Bogden & Quigley, Inc. Publishers, (1971).
17. D.R. Wilken; Lebesgue Measure of parts for $R(X)$. Proc. Amer. Math. Soc., 18 (1967) 508-512.