数理解析研究所講究録
207巻 1974年 59-66

Non Stein Algebra の例について

東大 理　大槻 真

§0. Introduction

Grauert [1] は次のような complex manifold X の例を与えた：

(I) X は擬凸多様体である（即ち X 上に complete pseudo-convex fcn. が存在する），

(II) X 上の holomorphic fcns. の成す環 $\Gamma(X, \mathcal{O})$ は Stein algebra でない（即ち $\mathrm{Spec}\,\Gamma(X, \mathcal{O})$ が Stein space でない）。

彼の例は複雑で，(I) の性質の由来する仕組みがわかりにくいが，ここでは §1 で上記の2性質をもつより簡単な例を与え，§2 では両者が共に Stein space と関連づけられることを示し，更に当面の問題を挙げようと思う。

§1. Non Stein Algebra の例.

次のものを考える：

R : compact Riemann surface of genus ≥ 1,

F: R上の infinite order の topologically trivial line bundle (即ち $F^n \neq 1$ for $\forall n \in \mathbb{Z}-\{0\}$),

G: R上の negative line bundle,

$V = F \oplus G$ (Whitney sum).

以上, F, G, V は各 bundle の total space を表わすものとする。このとき, F, G上には夫々 complete p-convex fcn. が存在し (Grauert [1], [2]), V上にも complete p-convex fcn. φ で, V上で $\varphi \geq 0$, R上でのみ $\varphi = 0$ となるようなものが存在する (ここで Rは total space V の中の zero section とみなしている)。

$\forall c > 0$ に対して, $V_c = \{p \in V \mid \varphi(p) < c\}$ とおくと, $\Gamma(V_c, \mathcal{O})$ は Stein algebra でない。

以下のその証明は, Grauert [1] のそれにほぼ同じものである。

Rの covering $\mathfrak{U} = \{U_\lambda\}$ について, F, Gの fibre coordinate を夫々 ζ_λ, ξ_λ とし, $S = \{\xi_\lambda = 0\} \subset V$とおく。

$f \in \Gamma(V_c - S, \mathcal{O})$ を ζ_λ, ξ_λ に関する Hartogs 級数に展開して,

$$f = \sum_{m,n} f_\lambda^{(m,n)}(p)\, \zeta_\lambda^m \xi_\lambda^n, \quad p \in U_\lambda,$$

とすると,

$$f^{(m,n)} = \{f_\lambda^{(m,n)}\}_\lambda \in \Gamma(R, \mathcal{O}(F^{-m} \otimes G^{-n}))$$

が成り立つ。これから次のことが容易にわかる：

① $n<0$ のとき，
$$f^{(m,n)}=0 \qquad \text{for } {}^{\forall}m,$$

② $n=0$ のとき，
$$f^{(0,0)}=\text{constant}$$
$$f^{(m,0)}=0 \qquad \text{if } m\neq 0,$$

③ ${}^{\exists}n>0$ に対して
$$\dim_{\mathbb{C}} \Gamma(R, \mathcal{O}(F^{-m}\otimes G^{-n}))>0 \quad \text{for } {}^{\forall}m.$$

故に先ず；

Proposition 1.

(1) $\Gamma(V_c,\mathcal{O}) \cong \Gamma(V_c-S,\mathcal{O})$,

(2) ${}^{\forall}f\in\Gamma(V_c,\mathcal{O})$ に対して，$f|_S\equiv \text{constant}.$

今，$\mathfrak{m}$ を S の ideal の sheaf とすると，Prop. 1, (2)より，
$$\dim_{\mathbb{C}} \Gamma(V_c,\mathcal{O})/\Gamma(V_c,\mathfrak{m})=1.$$

また③をみたす n に対しては

③' $\dim_{\mathbb{C}} \Gamma(V_c,\mathfrak{m}^n)/\Gamma(V_c,\mathfrak{m}^{n+1})=\infty,$

が成り立つ。そこでこのような n の最小値を n_0 とする $(n_0\geq 1)$。

Proposition 2.

$\Gamma(V_c,\mathcal{O})$ の ideal $\Gamma(V_c,\mathfrak{m})$ は有限生成ではない。

（証明） $f_1,\cdots,f_l$ が $\Gamma(V_c,\mathfrak{m})$ を生成すると仮定する。

$h : \Gamma(V_c, \mathcal{O})^l \longrightarrow \Gamma(V_c, \mathfrak{m})$ なる homomorphism を
$h : (g_1, \cdots, g_l) \longmapsto \sum_{i=1}^{l} f_i g_i$ と定めると，これは surjective.
これを mod $\Gamma(V_c, \mathfrak{m}^{n_0+1})$ で考えると，h は homomorphism
$$\underline{h} : [\Gamma(V_c, \mathcal{O})/\Gamma(V_c, \mathfrak{m}^{n_0})]^l \longrightarrow \Gamma(V_c, \mathfrak{m})/\Gamma(V_c, \mathfrak{m}^{n_0+1})$$
を induce する。従って $\dim_{\mathbb{C}} \Gamma(V_c, \mathfrak{m})/\Gamma(V_c, \mathfrak{m}^{n_0+1}) < \infty$
であるが，これは ③′ に反する。 (証了)

ところで，$\forall p \in S$ に対して character $f \longmapsto f(p)$ の
kernel は $\Gamma(V_c, \mathfrak{m})$ である，即ち $\Gamma(V_c, \mathfrak{m})$ は $\Gamma(V_c, \mathcal{O})$
の character ideal であり，Grauert [1] の §2, Satz 3 に
よれば，Stein algebra の character ideal は有限生成で
ある。従って，

Proposition 3.
$\Gamma(V_c, \mathcal{O})$ は Stein algebra でない。

§2. Stein space への reduction と問題.

§1 の vector bundle V を他の方法で解釈してみよう：
$\pi : G \to R$ を projection とし，π による F のひきもどし
を $\pi^* F$ とすると，$V \cong \pi^* F$ である。

V 内で divisor S に附随する line bundle $[S]$ の G への
restriction $[S]_G$ は，G 上の line bundle $[R]$ に等しい。
そしてこれは hol. divisor だから，次の hol. map

$$\Phi : \pi^* F \longrightarrow \pi^* F \otimes [S]_G$$

は well-defined である（G 内の R の defining fcn. をかける）。

$V' = \pi^* F \otimes [S]_G$，$V'$ の R 上の fibre 全体を S' とおくと，

(1) $\Phi : V - S \xrightarrow{\sim} V' - S'$

(2) $\Phi(S) = R$，

一方，Suzuki [3] によれば，$[S]_G$ は R の十分小さな nbd. では negative であり，従って V' 内で R は exceptional になり blow down できる（V' は R 上の vector bundle としては $V' = (F \otimes G) \oplus G$ に等しい）。それを $\varpi : V' \longrightarrow \underline{V}'$，$\underline{S}' = \varpi(S')$ とおくと，次の hol. maps の列ができた：

$$V \xrightarrow{\Phi} V' \xrightarrow{\varpi} \underline{V}',$$

$$V - S \xrightarrow{\sim} V' - S' \xrightarrow{\sim} \underline{V}' - \underline{S}',$$

$$\Phi(S) = R, \quad \varpi(R) = \{1 \text{ pt.}\}$$

$\underline{V}'$ は isolated singularity $p_0 = \varpi(R)$ をもった Stein space であり，$\underline{S}'$ は p_0 を通る codim. 1 の anal. set である。

又，V_c の $\underline{V}'$ 内の image を $\underline{V}_c'$ とすると，$\underline{V}_c'$ は $\underline{V}'$ 内で singular point p_0 を頂点にもつ "cone" と考えられ，$\mathrm{Spec}\, \Gamma(V_c, \mathcal{O}) \cong \underline{V}_c'$ となっている。即ち $\underline{V}_c'$ の頂点 p_0 が $\mathrm{Spec}\, \Gamma(V_c, \mathcal{O})$ に complex structure の入らないような点である。

Grauert [1] の例も同様に reduction 可能である。先ずその例を説明する。R, G は前と同じとし，G の各 fibre に無限遠点をつけ加えた $\mathbb{P}$-bundle を X とする。X 内で R を blow down したものを X' とし，X' 上の negative line bundle を F_1', map $X \to X'$ で F_1' をひきもどしたものを F_1 とする。次に R 上の infinite order の topologically trivial line bundle F_2' をとり，その X へのひき戻しを F_2 とする。$F = F_1 \otimes F_2$, F の zero section を $\tilde{S}$, R 上にある F の fibres 全体を S とすると，以下のことが成り立つ：

(1) $\Gamma(F-\tilde{S} \cup S, \mathcal{O}) \cong \Gamma(F, \mathcal{O})$

(2) $\Gamma(F, \mathcal{O})$ は Stein algebra でない。

さて，$\tilde{S}$ $(\cong X)$ 上に line bundles $[\tilde{S}]$, $[S]$ を制限すると，明らかに，

$$[\tilde{S}]_{\tilde{S}} = F, \quad [S]_{\tilde{S}} = [R],$$

が成り立つ。$l, m \geq 0$ として $\tilde{S}$ 上の line bundle

$$F^{(l,m)} = ([\tilde{S}]^l \otimes [S]^m)_{\tilde{S}}$$

を考えると，$[S]_{\tilde{S}}$ が hol. divisor から定まっているから，前と同様に hol. map

$$\Phi : F \longrightarrow F^{(l,m)}$$

が well defined である。

$F^{(l,m)}$ の zero section を $\tilde{S}'$ とすると $\tilde{S}' \cong \tilde{S}$ であり，やはりRを含んでいるとしてよい。R上の $F^{(l,m)}$ の fibre 全体を S' とおく。このとき，

(1) $\Phi : F - S \longrightarrow F^{(l,m)} - S'$

は葉数 l 枚の hol. map で，S の周りで丁度 l 位の分岐をしている。

(2) $\Phi(S) = R \subset S'$.

一方，Suzuki [3] によれば，line bundle $F^{(l,m)}$ は，(l,m) を充分大きくとれば negative になる。従って $F^{(l,m)}$ 内で $\tilde{S}'$ は exceptional であり，blow down $\varpi : F^{(l,m)} \longrightarrow \underline{F}^{(l,m)}$ を行うことができる。$\varpi(S') = \underline{S}'$, $\varpi(\tilde{S}') = p_0$ とおく。

かくしてこの時も又，hol. maps の列

$$F \xrightarrow{\Phi} F^{(l,m)} \xrightarrow{\varpi} \underline{F}^{(l,m)}$$

ができ，

$$F - \tilde{S} \cup S \xrightarrow{l\text{枚}} F^{(l,m)} - \tilde{S}' \cup S' \xrightarrow{\sim} \underline{F}^{(l,m)} - \underline{S}'$$

$$\Phi(\tilde{S} \cup S) = \tilde{S}', \quad \varpi(\tilde{S}') = \{p_0\}.$$

そして $\underline{F}^{(l,m)}$ は p_0 を isol. sing. にもつ Stein space で，$\underline{S}'$ は p_0 を通る codim. 1 の anal. set である．なお $\cancel{\Gamma(F^{(l,m)} - \tilde{S} \cup S')}$ $\Gamma(F^{(l,m)} - \tilde{S}' \cup S', \mathcal{O})$ も又 non Stein algebra であることは容易にわかる。

以上2つの例をみると, non Stein algebra をもつ manifold が Stein space 内の singularity に頂点をもつ "cone" に帰着されたことがわかる(Grauert の例でもそうなる, [1])。このことが一般に可能であると予想することは大胆に過ぎるかもしれないが, しかし non Stein algebra が上のような "cone" の頂点の "resolution" として得られていることは注目に値する。その為に先ず手近に次のような問題が考えられるだろう:

Problem Stein space X と, その codim. 1 の anal. subset S が与えられた時, $\Gamma(X-S, \mathcal{O})$ が Stein algebra になる為の条件をもとむ.

これはまだわからないが, 上でみたごとく, なんらかの "有限条件" がでてくるであろう(§1 の例では F の order, §2 の例では F_2 の order)。

参考文献

1. Grauert, Bemerkenswerte pseudokonvexe Mannigfaltigkeiten, Math. Zeit., 81, (1963).
2. Grauert, Über Modifikationen und exzeptionelle analytische Mengen, Math. Annalen 146 (1962).
3. O. Suzuki, この講究録中の論文 及び these.