

Title	ランク1の対称空間上のラプシアンの固有函数 (超函数と線型微分方程式 II)
Author(s)	峰村, 勝弘
Citation	数理解析研究所講究録 (1974), 209: 149-155
Issue Date	1974-05
URL	http://hdl.handle.net/2433/105183
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

ランク 1 の 2 次元空間上の
ラプラスの固有函数

大島 理 峰村 勝弘

§ 1. Helgason 予想

$X_0 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, $B_0 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ とする. X_0 上の
微分作用素

$$\Delta_0 = (1 - x^2 - y^2)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right), \quad z = x + iy$$

の X_0 上の固有函数について考察する. X_0 上の任意の調和函数
(即ち固有値 0 の固有函数) は, ポアソン核

$$P(z, b) = \frac{1 - |z|^2}{1 - 2|z|\cos(\theta - \eta) + |z|^2}, \quad z = e^{i\theta}|z|, \quad b = e^{i\eta}$$

により B_0 上の (佐藤) 超函数を積分して得られること知ら
れている. 最近 Helgason は [2] で B_0 上の超函数 T の (以下
超函数はすべて佐藤超函数を意味する) ポアソン積分

$$\int_{B_0} P(z, b)^{(s+1)/2} dT(b), \quad s \in \mathbb{R}$$

により Δ_0 の固有値 $(s^2 - 1)$ の固有函数が与え得られること
を示した. 実は X_0 はリー群 $G = SU(1, 1)$ をその極大コンパクト
部分群 $K (\cong SO(2))$ で割った等質空間であり. Δ_0 は G の
リー環 \mathfrak{g} のキリング形式から作られる X_0 上の G -不変なリー

マン計量に対応するラプラシアンのある正の定数倍に等しい。 Helgason は、この問題を一般のランク 1 の (非コンパクト) 対称空間上での問題に定式化し、同様な結論の成立を示唆した。我々はそれを Helgason 予想と呼ぶことにする。次にその Helgason 予想を精確に述べよう。

G を中心が有限である連結実単純リー群 G ; 非コンパクトとする。 \mathfrak{g}_0 を G のリー環、 K を G の (一つの) 極大コンパクト部分群、 \mathfrak{k}_0 を K のリー環とする。 \mathfrak{g}_0 のキリング形式 \langle, \rangle に関する \mathfrak{k}_0 の直交補空間を \mathfrak{p}_0 とおき、 \mathfrak{a}_+ を \mathfrak{p}_0 の一つの極大可換部分環とする。ランク 1 の (非コンパクト) 対称空間は、 $\dim \mathfrak{a}_+ = 1$ であるような G を K で割った商空間 G/K として得られる。以下 $\dim \mathfrak{a}_+ = 1$ を仮定する。 \mathfrak{a}_0 を \mathfrak{a}_+ を含む \mathfrak{g}_0 の一つの極大可換部分環とし、 $\mathfrak{a}_- = \mathfrak{a}_0 \cap \mathfrak{k}_0$ とおく。 $\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_+, \mathfrak{a}_-$ の $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \otimes \mathbb{C}$ における複素化を $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_p, \mathfrak{a}_n$ とする。 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ に関するルートの全体を Σ とする。 \mathfrak{a}_+^* と $(\mathfrak{a}_+ \cap \mathfrak{a}_-)^*$ に両立する誘引式順序を一つ固定し、この順序に関する正のルート全体を P 、 P の元 α が \mathfrak{a}_+ 上で消えない \mathfrak{a} の全体を P_+ とする。ルートの α が \mathfrak{a}_+ の制限を $\bar{\alpha}$ とし、

$$P = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in P_+} \bar{\alpha}, \quad \mathfrak{n}_0 = \mathfrak{g}_0 \cap \left(\sum_{\alpha \in P_+} \mathfrak{g}^\alpha \right)$$

とよく。 \mathfrak{n}_0 はルートの α に対応するルートのベクトル空間の可換部分空間を表わす。 $\mathfrak{a}_+, \mathfrak{n}_0$ をリー環に持つ。 G の解析

的部分群をそれぞれ A, N とする。 G は $G = KAN$ と一意的に分解される (岩沢分解)。岩沢分解により、 $x \in G$ に対して $H(x) \in \mathfrak{a}$ の元を $x \in K(\exp H(x))NT$ と、2 定めよとすることができる。 K にあける A の中心化群を M とし、 $X = G/K$, $B = K/M$ とおく。このとき対称空間 X に対するポアソン核は

$$P(x, b) = \exp\{-2\rho(H(g^{-1}b))\}, \quad x = gK, b = kM$$

で与えられる。 \mathfrak{g}_0 のキリン形式から作られる X 上の G -不変なリーマン計量に対応するラプラシアンを Δ とし、リー環 \mathfrak{g}_0 から定まる正定数 $\langle \rho, \rho \rangle$ によって、 $\Delta_0 = \langle \rho, \rho \rangle \Delta$ とし、 Δ を正規化する。このとき Helgason 予想は、次の様に述べられる。

予想 C (Helgason 予想)

ランク 1 の対称空間 X において、函数

$$P_s(T)(x) = \int_B P(x, b)^{(1+s)/2} dT(b)$$

は、 s が \mathbb{R} を、 T が B 上の超函数を動くとき、 Δ_0 の固有値 $\mu \geq -1$ の固有函数を尽くす。

予想 C において「 \mathbb{R} 」を「 \mathbb{C} 」に、「固有値 $\mu \geq -1$ 」を「すべての複素数固有値」に置きかえた命題を、強形式の Helgason 予想と呼ぶことにする。すなわち、

予想 C' (既約形の Helgason 予想)

ランク 1 の対称空間 X において、函数

$$P_S(T)(x) = \int_B P_S(x, b)^{(1+s)/2} dT(b)$$

は、 $s \in \mathbb{C}$ を、 T が B 上の超函数を動くとき、 Δ_0 のすべりの複素数固有値の固有函数を尽くす。

とくに、 T が B 上の連続函数であるときは、 $P_S(T)$ ($s \in \mathbb{C}$) は Δ_0 の固有値 $(s^2 - 1)$ の固有函数であることに注意する。

Helgason は、単位円内部 $X_0 = SU(1, 1)/K$ の場合には予想 C を証明し、更に脚注で、予想 C' も成立すると述べている。

§ 2. ランク 1 の (既約) 対称空間

ランク 1 の対称空間は

(1) A III 型 $SU(n, 1)/S(U_n \times U_1)$ (EII: 双曲型空間) $n \geq 1$.

(2) BD-I 型 $SO_0(n, 1)/SO(n)$ (実双曲型空間) $n \geq 2$

(3) C II 型 $Sp(n, 1)/Sp(n) \times Sp(1)$ $n \geq 1$

(4) F II 型

に分類される。とくに単位円内部は、(1) の $n = 1$ 、(2) の $n = 2$ の場合には共通に含まれる。又 (2) の $n = 4$ の対称空間は、(3) の $n = 1$ の場合の対称空間と同型である。

§3. 実双曲型空間上の Δ_0 の具体的表示

§2で述べた(2)の実双曲型空間は次の様に実現される。

$G = SO_0(n, 1)$ の元 g を

$$g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad A: n \times n, B: n \times 1, C: 1 \times n, D: 1 \times 1$$

と表わし、 g の \mathbb{R}^n 上の作用を、 $x \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$g \cdot x = (Ax + B)(Cx + D)^{-1}$$

で定める。

$$D = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid |x|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2 < 1 \}, \quad x = {}^t(x_1, \dots, x_n)$$

$$S^{n-1} = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid |x|^2 = 1 \}$$

とすると、 G は D に推移的に作用し

$$G/K \approx D \text{ (同型)}, \quad K \cong SO(n)$$

となる。又 K は S^{n-1} に推移的に作用し

$$K/M \approx S^{n-1}, \quad M \cong SO(n-1).$$

である。よって D 上のラプラシアン Δ_0 は

$$\Delta_0 = \frac{4}{(n-1)^2} (1 - |x|^2) \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \sum_{i,j=1}^n x_i x_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} - 2 \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right\},$$

($\Delta = \frac{n-1}{8} \Delta_0$) で与えられる。

§4. 現在までの結果と証明の方針

現在までに得られたこと。対称空間の各タイプに対応する結果と証明の概略を述べる。

対称空間	成立が証明された予想
A III型	C
BD-I型	C'
CII型	考察中。(しかし、Cが成立する可能性は非常に強い。)

F II型は全く考察してないが、Cは成立すると思われる。

証明の概略は以下の様である。

(i) B上の超函数の階級づけ。 B上の超函数を、B上の球函数 φ により展開し、その係数の、パラメタ φ に関する増大度で特徴づける。 ([1], [4])

(ii) B上の球函数 φ のポアソン積分 $f_s^\varphi = P_s(\varphi)$ を、Gの部分群A上でのある種の微分方程式を解くことにより、(定数倍を除いて) 超幾何級数により表示する。

(iii) 冪一型の定理により、 τ 、その定数を決定する。 ([5])

(iv) Δ_0 の固有値 $s^2 - 1$ の固有函数を、 f_s^φ により (φ は関する和として) 展開し、その係数の φ に関する増大度 τ 、B上の超函数の φ による展開の係数の増大度を比較する。

対称空間のタイプによって成立する予想 (正確に言えば、証明を与えることのできる予想) が豊富なのは、(iv) の段階における f_s^φ の (φ に関する) 増大度の評価の (各 s に対する)

技術的に難易に依り、2...3。現在 佐藤-河合-柏原により
群論を用いて証明が追求され2...3。

文献

- [1] M. Hashizume, K. Minemura and K. Okamoto, Harmonic Functions on Hermitian Hyperbolic Spaces, Hiroshima Math. J., 3 (1973), 81-108.
- [2] S. Helgason, A duality for symmetric spaces with applications to group representations, Advances in Math., 5 (1976), 1-154.
- [3] L. K. Hua, Harmonic Analysis of Functions of Several Complex Variables in the Classical Domains, A.M.S. Transl.
- [4] K. Minemura, Harmonic Functions on Real Hyperbolic Spaces, Hiroshima Math. J., 3 (1973), 121-151.
- [5] ———, Eigenfunctions of the laplacian on a real hyperbolic space, preprint.
- [6] ———, Eigenfunctions of the laplacian on a hermitian hyperbolic space, preprint.
- [7] ———, 実双曲空間上の laplacian の固有函数のホップマン種命表示, 数理解析研究所講究録 182, 2=71 表現論とその応用, 86-101.