数理解析研究所講究録
209巻 1974年 149-155

ランク1の対称空間上のラプラシアンの固有函数

広島大 理 峰村 勝弘

§1. Helgason 予想

$X_0=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|<1\}$, $B_0=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|=1\}$ とおく。X_0 上の微分作用素

$$\Delta_0=(1-x^2-y^2)^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right), \quad z=x+iy$$

の X_0 上での固有函数について考察する。X_0 上の任意の調和函数(即ち固有値0の固有函数)は、ポアソン核

$$P(z,b)=\frac{1-|z|^2}{1-2|z|\cos(\theta-\eta)+|z|^2}, \quad z=e^{i\theta}|z|,\ b=e^{i\eta}$$

により B_0 上の(佐藤)超函数を積分して得られることが知られているが、最近 Helgason は [2] で、B_0 上の超函数 T の(以下超函数はすべて佐藤超函数を意味する)ポアソン積分

$$\int_{B_0} P(z,b)^{(1+s)/2}\,dT(b), \quad s\in\mathbb{R}$$

によって、Δ_0 の固有値 (s^2-1) の固有函数がすべて得られることを示した。実は、X_0 はリー群 $G=SU(1,1)$ をその極大コンパクト部分群 $K(\cong SO(2))$ で割った等質空間であり、Δ_0 は、G のリー環 $\mathfrak{g}_0$ のキリング形式から作られる X_0 上の G-不変なリー

マン計量に対応するラプラシアンのある正の定数倍に等しい。Helgasonは、この問題を一般のランク1の(非コンパクト)対称空間上での問題に定式化し、同様な結論の成立を示唆した。我々はそれをHelgason予想と呼ぶことにする。次にそのHelgason予想を精密に述べよう。

Gを中心が有限である連結実半単純リー群で、非コンパクトとする。$\mathfrak{g}_0$をGのリー環、KをGの(一つの)極大コンパクト部分群、$\mathfrak{k}_0$をKのリー環とする。$\mathfrak{g}_0$のキリング形式$\langle\ ,\ \rangle$に関する$\mathfrak{k}_0$の直交補空間を$\mathfrak{p}_0$とおき、$\mathfrak{a}_+$を$\mathfrak{p}_0$の一つの極大可換部分環とする。ランク1の(非コンパクト)対称空間は$\dim \mathfrak{a}_+ = 1$であるようなGをKで割った等質空間G/Kとして得られる。以下$\dim \mathfrak{a}_+ = 1$を仮定する。$\mathfrak{a}_0$を$\mathfrak{a}_+$を含む$\mathfrak{g}_0$の一つの極大可換部分環とし、$\mathfrak{a}_- = \mathfrak{a}_0 \cap \mathfrak{k}_0$とおく。$\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_+, \mathfrak{a}_-$の$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$における複素化を$\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}, \mathfrak{a}_{\mathfrak{k}}$とする。$(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$に関するルートの全体を$\Sigma$とする。$\mathfrak{a}_+^*$と$(\mathfrak{a}_+ + \sqrt{-1}\,\mathfrak{a}_-)^*$に両立する辞書式順序を一つ固定し、この順序に関する正のルート全体をP、Pの元で$\mathfrak{a}_+$上で消えないもの全体をP_+とする。ルートαの$\mathfrak{a}_+$への制限を$\bar{\alpha}$として、

$$\rho = \frac{1}{2}\sum_{\alpha \in P_+} \bar{\alpha}, \quad \mathfrak{n}_0 = \mathfrak{g}_0 \cap \Big(\sum_{\alpha \in P_+} \mathfrak{g}^{\alpha}\Big)$$

とおく。ここに、$\mathfrak{g}^{\alpha}$はルートαに対応するルートベクトルのなす部分空間を表わす。$\mathfrak{a}_+, \mathfrak{n}_0$をリー環にもつ、$G$の解析

的部分群をそれぞれA, Nとするとき、GはG=KANと一意的に分解される(岩沢分解)。岩沢分解により、$x\in G$に対して$H(x)\in\mathfrak{a}_+$の元を$x\in K(\exp H(x))N$でもって定めることができる。KにおけるAの中心化群をMとし、$X=G/K$, $B=K/M$とおく。このとき対称空間Xに対するポアソン核は

$$P(x,b)=\exp\{-2\rho(H(g^{-1}k))\},\quad x=gK,\ b=kM$$

で与えられる。$\mathfrak{g}_0$のキリング形式から作られるX上のG－不変なリーマン計量に対応するラプラシアンをΔとし、リー環$\mathfrak{g}_0$から定まる正定数$\langle\rho,\rho\rangle$によって、$\Delta_0=\langle\rho,\rho\rangle^{-1}\Delta$とおいて$\Delta$を正規化する。このときHelgason予想は、次の様に述べられる。

予想C(Helgason予想)

ランク1の対称空間Xにおいて、函数

$$\mathcal{P}_s(T)(x)=\int_B P(x,b)^{(1+s)/2}\,dT(b)$$

は、sが$\mathbb{R}$を、TがB上の超函数を動くとき、Δ_0の固有値$\mu\geq-1$の固有函数を尽くす。

予想Cにおいて「$\mathbb{R}$」を「$\mathbb{C}$」に、「固有値$\mu\geq-1$」を「すべての複素数固有値」におきかえた命題を、強い形のHelgason予想と呼ぶことにする。すなわち、

予想C′（強い形のHelgason予想）

ランク1の対称空間Xにおいて．函数

$$\mathcal{P}_s(T)(x) = \int_B P_s(x,b)^{(1+s)/2}\,dT(b)$$

は．sがℂを，TがB上の超函数を動くとき，Δ_0のすべての複素数固有値の固有函数を尽くす。

とくに．TがB上の連続函数であるときは．$\mathcal{P}_s(T)$ $(s\in\mathbb{C})$はΔ_0の固有値(s^2-1)の固有函数であることに注意する。Helgasonは、単位円内部$X_0=SU(1.1)/K$の場合に予想Cを証明し，更に脚注で，予想C′も成立すると述べている。

§2．ランク1の（既約）対称空間

ランク1の対称空間は

(1) AIII型　$SU(n,1)/S(U_n\times U_1)$　（エルミート双曲型空間）　$n\geq 1$。

(2) BD-I型　$SO_0(n,1)/SO(n)$　（実双曲型空間）　$n\geq 2$

(3) CII型　$Sp(n,1)/Sp(n)\times Sp(1)$　$n\geq 1$

(4) FII型

に分類されている。とくに単位円内部は．(1)の$n=1$，(2)の$n=2$の場合に共通に含まれている。又(2)の$n=4$の対称空間は．(3)の$n=1$の場合の対称空間に同型である。

§3. 実双曲型空間上のΔ_0の具体的表示

§2で述べた、(2)の実双曲型空間は次の様に実現される。

$G=SO_0(n,1)$の元gを

$$g=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \qquad A: n\times n,\ B: n\times 1,\ C: 1\times n,\ D: 1\times 1$$

と表わし、gの$\mathbb{R}^n$上の作用を、$x\in\mathbb{R}^n$に対して

$$g\cdot x=(Ax+B)(Cx+D)^{-1}$$

で定める。

$$D=\{x\in\mathbb{R}^n \mid |x|^2=x_1^2+\cdots+x_n^2<1\},\ x={}^t(x_1,\cdots,x_n)$$

$$S^{n-1}=\{x\in\mathbb{R}^n \mid |x|^2=1\}$$

とおくと、GはDに推移的に作用し

$$G/K\approx D\ (\text{同型}).\quad K\cong SO(n)$$

となる。又KはS^{n-1}に推移的に作用し

$$K/M\approx S^{n-1},\ M\cong SO(n-1).$$

である。このときD上のラプラシアンΔ_0は

$$\Delta_0=\frac{4}{(n-1)^2}(1-|x|^2)\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}-\sum_{i,j=1}^{n}x_ix_j\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}-2\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right\},$$

($\Delta=\frac{n-1}{8}\Delta_0$) で与えられる。

§4. 現在までの結果と証明の方針

現在までに得られている、対称空間の各タイプに対する結果と証明の概略を述べる。

対称空間	成立が証明された予想
AIII型	C
BD-I型	C'
CII型	考察中。(しかし、Cが成立する可能性は非常に強い。)

FII型は全く考察していないが、Cは成立すると思われる。

証明の概略は以下の様である。

(i) B上の超函数の特徴づけ。B上の超函数を、B上の球函数φにより展開し、その係数の、パラメタφに関する増大度で特徴づける。([1], [4])

(ii) B上の球函数φのポアソン積分$f_s^{\varphi} = \mathcal{P}_s(\varphi)$を、Gの部分群A上でのある種の微分方程式を解くことにより、(定数倍を除いて)超幾何級数によって表示する。

(iii) ファトゥー型の定理によって、その定数を決定する。([5])

(iv) Δ_0の固有値s^2-1の固有函数を、f_s^{φ}により(φに関する和として)展開し、その係数のφに関する増大度と、B上の超函数のφによる展開の係数の増大度を比較する。

対称空間のタイプによって成立する予想(正確に言えば、証明を与えることのできた予想)が異なるのは、(iv)の段階におけるf_s^{φ}の(φに関する)増大度の評価の(各sに対する)

技術的な難易に依っている。現在 佐藤―河合―柏原により群論を用いない証明が追求されている。

文献

[1] M. Hashizume, K. Minemura and K. Okamoto, Harmonic Functions on Hermitian Hyperbolic Spaces, Hiroshima Math. J., 3(1973), 81-108.

[2] S. Helgason, A duality for symmetric spaces with applications to group representations, Advances in Math., 5(1970), 1-154.

[3] L. K. Hua, Harmonic Analysis of Functions of Several Complex Variables in the Classical Domains, A.M.S. Transl.

[4]. K. Minemura, Harmonic Functions on Real Hyperbolic Spaces, Hiroshima Math. J., 3(1973), 121-151.

[5] ———, Eigenfunctions of the laplacian on a real hyperbolic space, preprint.

[6] ———, Eigenfunctions of the laplacian on a hermitian hyperbolic space, preprint.

[7] ———, 実双曲空間上のlaplacianの固有函数のポアッソン積分表示, 数理解析研究所講究録182, ユニタリ表現論とその応用, 86-101.