数理解析研究所講究録
209巻 1974年 135-148

既約正則概均質ベクトル空間の相対不変式の次数公式の証明

名大 理　　木村達雄

§1. 序

本論では，できるだけ self-contained にするため，定義からきちんと述べる． (G, V) が既約正則な概均質ベクトル空間であれば V 上の既約斉次相対不変多項式 $f(x)$ が定数倍を除いて唯1つ存在する。この次数を決定する公式を証明する。

この研究に関して，概均質ベクトル空間の理論を作られた佐藤幹夫先生に大変多くの事を教えていたゞきましたので，ここに記して心から感謝の意を表します．

次数公式は

$$\deg f = \frac{\mathrm{tr}_V A + \mathrm{tr}\,\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}_{x_0}} A}{\mathrm{tr}_V A} \cdot \dim V \quad \text{for } {}^\forall A \in \mathfrak{g}_{x_0}$$

と表わせる．ここで x_0 は codim 1 の singular orbit の点であり，$\mathfrak{g}_{x_0}$ はその点における isotropy subalgebra である．この Cor. として $\dim G = \dim V$ のときは $\deg f = \dim V$ であることがわかる．そのときは，f の具体的な形もわかる．

§2、 本論

$k = \mathbb{C}$（複素数体）とする．（k が標数 0 の代数閉体 ならよいが，簡単の為 こう仮定する．）

V = k 上の 有限次元 ベクトル空間，

$G \subset GL(V)$ を（連結）線型代数群 とする．

対 (G, V) が <u>概均質ベクトル空間</u>（pre-homogeneous vector space）とは ある algebraic set $S (\subsetneq V)$ があって $(V-S)$ が G の single orbit になっていることである．

更に (G, V) が <u>既約（irreducible）</u>とは，V が G-module として 既約 なことであるとする．　次の結果 が知られている．

Th.（Cartan）．　V = 代数閉体上の有限次ベクトル空間，

$\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ を 線型リー環 とし，V が $\mathfrak{g}$-既約 であるとする．然らば

$\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(1) \oplus \mathfrak{g}_{s.s.}$ or $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{s.s.}$（但し $\mathfrak{g}_{s.s.}$ = semi-simple Lie algebra）

（証明は 例えば 松島：リー環論　）

特に (G, V) 既約 概均質ベクトル空間 $\longrightarrow$ G : reductive alg. group．がいえる．

$x \in V-S$ における isotropy subgroup を G_x と記す．$G_x = \{ g \in G \mid g \cdot x = x \}$．

(G, V) 既約 概均質ベクトル空間 が <u>正則（regular）</u>であるとは

G_x $(x \in V-S)$ が reductive な 代数群 に なっていること である．

注）　一般には (G, V) が regular とは V 上の 相対不変式 f で $V-S \xrightarrow{\text{grad} \log f} V^*$ が generically surjective になるものが 存在することであるが，(G, V) が 既約なら G_x $(x \in V-S)$ が reductive であることと 同値である．（付記 参照）

さて (G,V) が irred. regular prehom.（既約正則概均質ベクトル空間を以下こう記す）ならば $V-S=G/G_x$ $(x\in V-S)$ において，G, G_x がともに reductive であるから，松島の定理によって，これは affine algebraic set になる．$V-S$ が affine である必要十分条件は

S が hypersurface になる事であるから

$S=S^1\cup\cdots\cup S^k$，$S^i=\{x\in V\mid f_i(x)=0\}$，$f_i$：$V$ 上の既約多項式 $(1\leq i\leq k)$

と書ける．

G：連結，より $\overline{G\cdot S_i}$ は既約な alg. set で $S_i\subset\overline{G\cdot S_i}\subset S$，かつ S_i は S の既約成分，となるから $G\cdot S_i=S_i$，即ち各 $f_i(x)$ $(1\leq i\leq k)$ は (G,V) の相対不変式である．　$k=1$ であることを示す為，$k\geq 2$ として矛盾を導く．

まず各 f_i が斉次多項式である事に注意しよう．（同じ character に対応する相対不変式が，定数倍を除いて一致することから導かれる．）

$Q(x)=\dfrac{f_2^{\deg f_1}}{f_1^{\deg f_2}}$ とおく．これは (G,V) の相対不変式で，しかも定数ではない．

G は $GL(1)\cdot G_{s.s.}$ と表わせるが，character は $G_{s.s.}$ 上では trivial であるし，また明らかに $GL(1)$ の作用でも不変である．

よって $Q(x)$ は絶対不変式になる．概均質ベクトル空間の絶対不変式は定数に限るから，これは矛盾である．　$\therefore k=1$．

注）(G,V) が既約でないと G の形が $GL(1)\cdot G_{s.s.}$ と表せないから，これは一般には成立しない．

以上をまとめて

$\boxed{\begin{array}{l}\text{☆ } (G,V) \text{ irred. regular prehom. とすると，その singular set } S \text{ は} \\ \text{既約な hypersurface で } S=\{x\in V \mid f(x)=0\} \text{ とすると，} f \text{ は } (G,V) \text{ の} \\ \text{既約な相対不変多項式である。　逆に } (G,V) \text{ の任意の相対不変式} \\ f' \text{ は } cf^m \ (c\neq 0,\ m\in\mathbb{Z}) \text{ の形である。}\end{array}}$

後半は，f' が相対不変な既約多項式なら $\{x\in V \mid f'(x)=0\}=S'$ は G-不変な alg. set ゆえ $S'\subset S$. $\dim S'=\dim S$ で S 既約ゆえ $S'=S$. すなわち $f'=cf$ ($^{\exists}c\neq 0$, const.). あとは相対不変式の素因子が（G の連結性より）また相対不変式になっていることより明らか。

以下 (G,V) irred. regular prehom. とし，$S=\{x\in V \mid f(x)=0\}$ とする。

$f(gx)=\chi(g)f(x)$ $(g\in G)$ としよう。

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\chi"] & GL(1) \\ \mathfrak{g} \arrow[u, "\exp"] \arrow[r, "\delta\chi"] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathfrak{gl}(1) \arrow[u, "\exp"'] \end{tikzcd}$$

G のリー環を $\mathfrak{g}$ とし，χ の微分を $\delta\chi$ と記す。

$^{\forall}A\in\mathfrak{g}$ に対して

$f(\exp tA\cdot x)=\exp t\,\delta\chi(A)\cdot f(x)$ であるから，t で微分して $t=0$ とすると $\langle Ax, \mathrm{grad}\rangle f(x)=\delta\chi(A)f(x)$ となる。$\dfrac{\mathrm{grad}\, f(x)}{f(x)}$ を $\mathrm{grad}\log f(x)$ と書くことができるから，$\langle Ax, \mathrm{grad}\log f(x)\rangle=\delta\chi(A)$ $(^{\forall}A\in\mathfrak{g},\ ^{\forall}x\in V-S)$

ところで (G,V) が prehom. であることから $\mathfrak{g}\cdot x=V$ $(^{\forall}x\in V-S)$. 従って $\mathrm{grad}\log f(x)\in V^*$ と考えられる。即ち

$$V-S \xrightarrow{\mathrm{grad}\log f} V^*$$

である。この写像は

generically surjective である. その証明は'付記'にまわす.

今 V と V^* を dual base によって同一視する.

$\langle Ax, \mathrm{grad}\log f(x)\rangle = \delta\chi(A)$, $\delta\chi(gAg^{-1}) = \delta\chi(A)$ より $\mathrm{grad}\log f(gx) = g^*\mathrm{grad}\log f(x)$ に注意しよう. 但し $\langle x, y\rangle = \langle gx, g^*y\rangle$ for ${}^\forall x\in V, y\in V^*$ によって g^* の作用を def する.

$\varphi_x(y) = \left\{\frac{d}{dt}\mathrm{grad}\log f(x+ty)\right\}_{t=0}$ によって $V \xrightarrow{\varphi_x} V$ を定義すれば $\mathrm{grad}\log f$ が gen. surj. なことにより, この一次変換は non-singular である.

$\varphi_{gx}(gy) = {}^tg^{-1}\cdot\varphi_x(y)$ ゆえ $J(x) = \det\varphi_x$ とおくと

$J(gx) = (\det_V g)^{-2}J(x)$, $J(x)\not\equiv 0$ となる. 即ち $J(x)$ は (G, V) の相対不変式である. $\therefore$ $J(x) = c\, f^m$ $({}^\exists m\in\mathbb{Z})$ とかける.

すなわち $(\det_V g)^{-2} = \chi(g)^m$ ここで $g = tI_V$ とすれば

$-2\dim V = m \deg f$ を得る. 即ち $(\det_V g)^{-2} = \chi(g)^{-\frac{2\dim V}{\deg f}}$

ここで $g = \exp tA$ $(A\in\mathfrak{g})$ として 両辺を微分して $t=0$ とおけば

$-2\,\mathrm{tr}_V A = -\frac{2\dim V}{\deg f}\delta\chi(A)$ すなわち $\boxed{\deg f = \frac{\delta\chi(A)}{\mathrm{tr}_V A}\dim V}$

(for ${}^\forall A\in\mathfrak{g}$) を得る.

これで次数公式の原型が得られた. しかしここで $\delta\chi(A)$ がまだ計算可能ではない.

$x_0\in S$ を S の generic point とする. そのとき $(df)_{x_0}\neq 0$ である. (codim 1 の orbit の点ならばより.)

normal vector space V_{x_0} を $V_{x_0} \overset{\mathrm{def}}{=} V/\mathfrak{g}\cdot x_0$ と def する.

$g \in G$ に対し $g\mathfrak{g}\cdot x_0 = (g\mathfrak{g}g^{-1})gx_0 = \mathfrak{g}\cdot gx_0$ ゆえ

$g \in G_{x_0}$ ($x_0 \in S$. Sの gen. pt.) ならば $g\cdot\mathfrak{g}x_0 = \mathfrak{g}x_0$, 即ち G_{x_0} は V_{x_0} に作用する. 従って G_{x_0} のリー環 $\mathfrak{g}_{x_0}$ も作用する.

次の事を示す.

$$☆ \quad tr_{V_{x_0}} A = \delta\chi(A) \quad \text{for } \forall A \in \mathfrak{g}_{x_0}$$

∵) $(df)_{x_0} \neq 0$ ゆえ V の座標 $(x_1, \cdots, x_n)$ を変換して x_0 の近傍で $(x_1', \cdots, x_n')$, $x_1' = f(x)$, $x_0 = (0, \cdots, 0)$ なる局所座標系をとる事ができる。 そのとき $\langle Ax, grad \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i(x') \frac{\partial}{\partial x_i'}$ とかける。

$\langle Ax, grad \rangle f(x) = \delta\chi(A) f(x)$ ゆえ

$$\delta\chi(A) = \frac{(\sum_i a_i(x')\frac{\partial}{\partial x_i'})x_1'}{x_1'} = \frac{a_1(x')}{x_1'} \quad \text{i.e. } a_1(x') = \delta\chi(A)\cdot x_1'$$

ところが

$$tr_{V_{x_0}} A = \left.\frac{\partial a_1(x')}{\partial x_1'}\right|_{x'=0} = \delta\chi(A) \qquad \text{Q.E.D.} \quad //$$

従って
$$deg f = \frac{tr_{V_{x_0}} A}{tr_V A} \dim V \quad (A \in \mathfrak{g}_{x_0},\ tr_V A \neq 0)$$

$V_{x_0} = V/\mathfrak{g}\cdot x_0$ ゆえ $tr_{V_{x_0}} A = tr_V A - tr_{\mathfrak{g}\cdot x_0} A = tr_V A - tr\,ad_{\mathfrak{g}} A + tr\,ad_{\mathfrak{g}_{x_0}} A$

ここで $\mathfrak{g}$ は reductive であるから

$tr\,ad_{\mathfrak{g}} A = 0 \ (\forall A \in \mathfrak{g}) \qquad \therefore\ tr_{V_{x_0}} A = tr_V A + tr\,ad_{\mathfrak{g}_{x_0}} A$

(for $\forall A \in \mathfrak{g}_{x_0}$) これによって次数公式が得られた. まとめると

> 定理．(G,V)を既約正則概均質ベクトル空間とする。そのとき，V上に既約な相対不変斉次多項式 $f(x)$ が定数倍を除いて唯一つ存在する．その次数は
>
> $$\deg f(x) = \frac{\mathrm{tr}_V A + \mathrm{tr}\,\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}_{x_0}} A}{\mathrm{tr}_V A}\cdot \dim V \quad (A\in\mathfrak{g}_{x_0},\ \mathrm{tr}_V A\neq 0)$$
>
> で与えられる．ここで x_0 は S の non-singular point (i.e. codim 1 の orbit の点)，$\mathfrak{g}_{x_0}$ は G の x_0 における isotropy subgroup のリー環である．（次数公式）

次に特に $\dim G = \dim V$ の場合を考えよう．そのような既約正則概均質ベクトル空間の例としては

$\underset{\square}{GL(1)}$，$\underset{\square\square\square}{GL(2)}$，$\underset{\square\square\otimes\square}{SL(3)\times GL(2)}$，$\underset{\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}\otimes\square}{SL(5)\times GL(4)}$ 等がある．（それぞれ $\dim G = \dim V = 1, 4, 12, 40$）

注）$\underset{\underbrace{\square\cdots\square}_{m}}{GL(n)}$ は $GL(n)$ が $u_1,\cdots,u_n$ を base とする空間に自然に作用しているとき $u_1,\cdots,u_n$ のつくる m 次斉次多項式の空間に induce される $GL(n)$ の表現．$\underset{\begin{smallmatrix}\square\\\vdots\\\square\end{smallmatrix}\}m}{GL(n)}$ は $u_{i_1}\wedge\cdots\wedge u_{i_m}$ $(1\leq i_1<\cdots<i_m\leq n)$ の作る空間に induce される表現．

その場合 $V-S\ni x$ における isotropy subgr. の $\dim = \dim G - \dim V = 0$

よって S の gen. pt. における isotropy subgroup の次元 $=1$．

$\therefore \dim\mathfrak{g}_{x_0} = 1$　　特に $\mathfrak{g}_{x_0}$ は可換なリー環であることがわかる．　従ってそこにおける adjoint 表現は 0-表現である．　次数公式より

系. (G, V) を既約正則概均質ベクトル空間で $\dim G = \dim V$ とする。そのとき，相対不変式（既約斉次多項式）$f(x)$ の次数は $\deg f(x) = \dim V$ である.

このことから例えば

$\underset{日\otimes口}{SL(5)\times GL(4)}$ の相対不変式は $\underbrace{40}_{(40変数)}$ 次式であることがわかる.

この場合 相対不変式は次のようにして与えられる。

$\dim \mathfrak{g} = \dim V = n$ とするとき，$A_1, \cdots, A_n$（n次正方行列）を $\mathfrak{g}$ の base とする。$\forall g \in G$ に対して

$$\underset{(gA_1g^{-1}, \cdots, gA_ng^{-1})}{\underset{\parallel}{ad(g)(A_1, \cdots, A_n)}} = (A_1, \cdots, A_n)\begin{pmatrix} C_{11}(g), & \cdots, & C_{1n}(g) \\ \vdots & & \\ C_{n1}(g), & \cdots, & C_{nn}(g) \end{pmatrix}$$

とする.（adjoint 表現を行列で表示したもの）

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in V$ とするとき 相対不変多項式 $f(x)$ は

$\underline{f(x) = \det(A_1 x, \cdots, A_n x)}$ で与えられる. 実際

$$f(gx) = \det(A_1 gx, \cdots, A_n gx) = \det g \cdot \det(g^{-1}A_1 gx, \cdots, g^{-1}A_n gx)$$
$$= \det g \cdot \det(c_{ij}(g^{-1}))\det(A_1 x, \cdots, A_n x) = \chi(g) f(x)$$

但し $\chi(g) = \det g \cdot \det(c_{ij}(g^{-1}))$　　$\deg f(x) = n$ は明らか.

注）この事は佐藤幹夫先生によってかなり前から知られていたが，この次数公式の Cor. によってこれが既約多項式であることがわかったのである.

次数公式をいくつかの場合に使ってみよう．

ex1. $\underset{\text{目}}{GL(6)}$ 表現空間は $u_i \wedge u_j \wedge u_k$ ($1 \leq i < j < k \leq 6$) を base とする 20次元空間で G-orbits は次の5つである．

I) 0 (0次元)

II) $u_1 \wedge u_2 \wedge u_3$ (10次元)

III) $u_1 \wedge u_2 \wedge u_3 + u_1 \wedge u_4 \wedge u_5$ (15次元)

IV) $u_1 \wedge u_2 \wedge u_3 + u_1 \wedge u_4 \wedge u_5 + u_2 \wedge u_4 \wedge u_6$ (19次元)

(I)–(IV): singular orbits

V) $u_1 \wedge u_2 \wedge u_3 + u_4 \wedge u_5 \wedge u_6$ (20次元) Zariski-open orbit.

IV)の点（計算の都合上 3,4 をいれかえた点 $u_1 \wedge u_2 \wedge u_4 + u_1 \wedge u_3 \wedge u_5 + u_2 \wedge u_3 \wedge u_6$ でやる）における isotropy subalgebra $\mathfrak{g}_{x_0}$ は

$$\mathfrak{g}_{x_0} = \left\langle \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc} a_1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_2 & a_{23} & a_{24}, & a_{34}+a_{16}, & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_3 & a_{34}, & a_{35}, & a_{36} \\ \hline & & & -(a_1+a_2) & -a_{32} & a_{31} \\ & 0 & & -a_{23} & -(a_1+a_3) & -a_{21} \\ & & & a_{13} & -a_{12} & -(a_2+a_3) \end{array}\right]}_{\displaystyle \shortparallel \atop \displaystyle A} \right\rangle \qquad \therefore\ \mathrm{tr}_V A = -10(a_1+a_2+a_3)$$

$$\mathrm{tr\,ad}_{\mathfrak{g}_{x_0}} A = 8(a_1+a_2+a_3)$$

$$\therefore\ \deg f = \frac{\mathrm{tr}_V A + \mathrm{tr\,ad}_{\mathfrak{g}_{x_0}} A}{\mathrm{tr}_V A} \cdot \dim V = \frac{-10+8}{-10} \times 20 = 4$$

この場合には相対不変式の具体的な形が佐藤幹夫先生によって与えられていて

$V \ni x = \sum_{1 \leq i < j < k \leq 6} x_{ijk} u_i \wedge u_j \wedge u_k$ に対して

$$f(x) = \sum^{10} x_{123}^2 x_{456}^2 - 2 \sum^{45} x_{123} x_{124} x_{356} x_{456} + 4 \sum^{30} x_{123} x_{145} x_{246} x_{356}$$ //

ex 2. $Spin(14) \times GL(1)$ の codim 1 の orbit (i.e. 63次元)
半スピン表現(64次元)

の点 x_0 における isotropy subalgebra $\mathfrak{g}_{x_0}$ は

$$
\mathfrak{g}_{x_0} \cong \left\langle \left(\frac{a_7}{2}\right) \oplus
\left[\begin{array}{ccccccc|ccccccc}
a_3 & a_{35} & a_{36} & -c_{15} & c_{27} & -c_{17} & & & & & & & & \\
-a_{24} & a_5 & -a_{21} & c_{13} & c_{47} & & -c_{17} & & & & & & & \\
a_{14} & -a_{12} & a_6 & c_{23} & & c_{47} & -c_{27} & & & & \mathbf{0} & & & \\
-2c_{47} & c_{27} & -2c_{47} & a_7 & -2c_{23} & 2c_{13} & 2c_{15} & & & & & & & \\
c_{13} & c_{15} & & c_{17} & -a_1 & -a_{21} & -a_{36} & & & & & & & \\
c_{23} & & c_{15} & c_{27} & -a_{12} & -a_2 & a_{35} & & & & & & & \\
 & c_{23} & -c_{13} & c_{47} & -a_{14} & -a_{24} & -a_4 & & & & & & & \\
\hline
 & c_{35} & c_{36} & c_{37} & -a_{13} & -a_{23} & a_{16}-a_{25} & -a_3 & a_{24} & -a_{14} & 2c_{47} & -c_{13} & -c_{23} & \\
-c_{35} & & c_{56} & c_{57} & -a_{15} & -a_{25} & -a_{45} & -a_{35} & -a_5 & a_{12} & -c_{27} & -c_{15} & & -c_{23} \\
-c_{36} & -c_{56} & & c_{67} & -a_{16} & -a_{26} & -a_{46} & -a_{36} & a_{21} & -a_6 & 2c_{17} & & -c_{15} & c_{13} \\
-c_{37} & -c_{57} & -c_{67} & & -c_{35} & -c_{36} & -c_{56} & c_{15} & -c_{13} & -c_{23} & -a_7 & -c_{17} & -c_{27} & -c_{47} \\
a_{13} & a_{15} & a_{16} & c_{35} & & c_{37} & c_{57} & -c_{27} & -c_{47} & & 2c_{23} & a_1 & a_{12} & a_{14} \\
a_{23} & a_{25} & a_{26} & c_{36} & -c_{37} & & c_{67} & c_{17} & & -c_{47} & -2c_{13} & a_{21} & a_2 & a_{24} \\
a_{25}-a_{16} & a_{75} & a_{46} & c_{56} & -c_{57} & -c_{67} & & & c_{17} & c_{27} & -2c_{15} & a_{36} & -a_{35} & a_4
\end{array}\right] \right\rangle
$$

with $\begin{cases} a_7 = -(a_1+a_2+a_3) = (a_4+a_5+a_6) \\ a_1+a_3 = a_4+a_6, \quad a_2+a_3 = a_4+a_5. \end{cases}$

$A \in \mathfrak{g}_{x_0}$ に対し $\quad tr_V A = 32a_7, \quad tr\, ad_{\mathfrak{g}_{x_0}} A = -28a_7$

$$\therefore \quad \deg f(x) = \frac{tr_V A + tr\, ad_{\mathfrak{g}_{x_0}} A}{tr_V A} \dim A = \frac{32-28}{32} \times 64 = 8$$

(詳しくは 木村:修士論文 参照)

注) $Spin(14) \times GL(1)$ (半スピン表現) や $SL(5) \times GL(4)$ (日⊗口) の相対不変式の次数をきめる為 色々考えているうちに 次数公式を得た. (1973.1.12 木村). そのときは 佐藤先生の定理を仮定して証明したが, この度 佐藤先生に それを教えていただいて, ここに まとめた. //

§3付記

(G, V) irred. regular prehom., $S=\{x\in V \mid f(x)=0\}$ のとき
$V-S \xrightarrow{\text{grad} \log f} V^*$ が generically surjective なこと.

V^* を V の dual とする. $\langle x, y\rangle = \langle gx, g^*y\rangle$ for $\forall x\in V, y\in V^*$ によって G を V^* へ作用させると, G が reductive であることから (G, V^*) は irred. regular prehom. になり $S^*=\{y\in V \mid \bar{f}(y)=0\}$ となる. $\bar{f}(x) \overset{\text{def}}{=} \overline{f(\bar{x})}$.

∵) G reductive ゆえ G の max. compact subgroup K があって G はその alg. closure である. 適当に base をとれば $K\subset U(n, \mathbb{C})$ ととれる. $g\in K$ に対して $\bar{f}(g^*y) = \bar{f}({}^tg^{-1}y) = \bar{f}(\bar{g}y) = \overline{f(g\bar{y})} = \overline{\chi(g)}\cdot\bar{f}(y)$
$= \chi^{-1}(g)\bar{f}(y)$ (∵ K compact ゆえ $|\chi(g)|=1$ for $g\in K$) よってこれが $\forall g\in G$ について成立つ. 従って $\bar{f}$ は (G, V^*) の相対不変式である. /

$\bar{f}(\text{grad}_x) f(x)^{s+1}$ は V 上の相対不変式である.
実際 $(\bar{f}(\text{grad}_x) f^{s+1})(gx) = \bar{f}(g^*\text{grad}_x)\cdot f(gx)^{s+1}$
$= \left(\chi^{-1}(g)\cdot\bar{f}(\text{grad}_x)\right)\left(\chi(g)^{s+1}\cdot f(x)^{s+1}\right) = \chi(g)^s\, \bar{f}(\text{grad}_x) f^{s+1}(x)$.
よって定数倍を除いて f^s と一致するが その定数は s に依存するからそれを $b(s)$ とかけば $\bar{f}(\text{grad}_x) f(x)^{s+1} = b(s) f(x)^s$ となる. この $b(s)$ を (G, V) の b-関数という.

これは明らかに s の多項式であるが, $\deg b(s) = \deg f$ となる。(G が reductive でないと一般にはいえない.) 実際

$f(x) = f(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i_1+\cdots+i_n=d} C_{i_1\cdots i_n} x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}$ ， $d=\deg f$ とする. $K\subset U(n)$ を満たす条件を保ちながら，base を変換すると

$f(1,0,\dots,0)\neq 0$ とできるが，f は定数倍の自由度があったから

$f(1,0,\dots,0)=1$ とする. i.e. $C_{d,0,\dots,0}=1$.

$$f(x)^{s+1} = \sum_{i_1+\cdots+i_n=d(s+1)} C^{(s+1)}_{i_1\cdots i_n} x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}$$ とすると

$$\bar{f}(\mathrm{grad}_x)^{s+1} f(x)^{s+1} = b(s)\,b(s-1)\cdots b(1)\,b(0)$$

$$\|$$

$$\sum_{i_1+\cdots+i_n=d(s+1)} |C^{(s+1)}_{i_1\cdots i_n}|^2\, i_1!\cdots i_n! \geq |C^{(s+1)}_{d(s+1),0,\dots,0}|^2 (d(s+1))! = (C_{d,0,\dots,0})^{2(s+1)} (d(s+1))!$$

$= (d(s+1))!$ 　　さて $\deg b(s) = d' < d$ とすれば

$|b(s)| \leq {}^{\exists}C\,(s+1)^{d'}$ ゆえ 　$C^{s+1}(s+1)!^{d'} \geq (d(s+1))!$

s が十分大きければ $(s+1)! > C^{s+1}$ ゆえ

$((s+1)!)^d \geq ((s+1)!)^{d'+1} \geq (d(s+1))!$ 　矛盾. ∴ $\deg b(s) \geq \deg f$.

他方 定義より $\deg b(s) \leq \deg f$ は明らかゆえ $\underline{\deg b(s) = \deg f}$. //

さて $d=\deg f$ として $b(s) = b_0 s^d + b_1 s^{d-1} + \cdots + b_d$ と表わしたとき

今示したことより $b_0 \neq 0$ である.

$\bar{f}(\mathrm{grad}_x) f(x)^{s+1} = b(s) f(x)^s$ の s^d の係数を比べると

$$\bar{f}(\mathrm{grad}\, f(x))\cdot f(x)^{s+1-d} = b_0 f(x)^s$$

$$\therefore\ \bar{f}(\mathrm{grad}\log f(x))\cdot f(x) = \underbrace{b_0}_{\neq 0} \quad (x\in V-S)$$ となる.

$x \in V-S$ ゆえ $f(x) \neq 0$、そして $b_0 \neq 0$ ゆえ

$\Phi(\mathrm{grad}\log f(x)) \neq 0$ i.e. $\mathrm{grad}\log f(x) \in V^* - S^*$

一方 $\mathrm{grad}\log f(gx) = g^* \cdot \mathrm{grad}\log f(x)$ である事により

$$\mathrm{grad}\log f\,(V-S) = V^* - S^*$$

すなわち $\overline{\mathrm{grad}\log f\,(V-S)} = V^*$ となり

$V-S \xrightarrow{\mathrm{grad}\log f} V^*$ が generically surjective である事が示された。 //

☆ 付記で $\deg f = \deg b(s)$ を示したが，次数公式はある意味では $b(s)$ の次数公式と考える方が本質的である。codim 1 の orbit から $b(s)$ の次数が定まったが，更に詳しい $b(s)$ の構造は一般の singular orbits によって決定される。

☆ 一般に (G,V) prehom. において G が reductive ならば

$\boxed{x_0 \in V-S \text{ の isotropy subgroup } G_{x_0} \text{ が reductive} \Rightarrow (G,V) \text{ regular}}$

が証明される。（付記で示した方法と本質的に同じ）

(G,V) が irred. の場合は逆方向もいえる。（分類の結果からわかる。） しかしながら既約でない場合でもいえるであろうと予想される。

文献

[1] 佐藤幹夫述 新谷卓郎記 概均質ベクトル空間の理論 数学の歩み 15-1 佐藤幹夫特集号

[2] 木村達雄：既約な概均質ベクトル空間の研究（修士論文）

概均質ベクトル空間のゼータ関数に関するものは省略します。

急いで書きあげた為，少々読み難くなったことをおわびします。