

Title	波動方程式に対する混合問題について (超函数と線型微分方程式 II)
Author(s)	宮武, 貞夫
Citation	数理解析研究所講究録 (1974), 209: 106-117
Issue Date	1974-05
URL	http://hdl.handle.net/2433/105187
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

波動方程式に対する混合問題について

京大理 宮武貞夫

§1. 序. 我々は 次の様な波動方程式に対する 初期-境界
値問題

$$(1) \begin{cases} P u = (D_x^2 + D_y^2 - D_t^2) u = f(x, y, t), & x > 0, t > 0 \\ B u \Big|_{x=0} = (D_x + b D_y - c D_t) u \Big|_{x=0} = g(y, t), & x = 0, t > 0 \\ D_t^j u \Big|_{t=0} = u_j(x, t), \quad (j = 0, 1), & x > 0, t = 0 \end{cases}$$

の L^2 -well-posedness について考えよう。特にここでは、 b, c が複素定係数の場合の必要条件について直接的な形で記述しよう。より一般的な形については、変係数の場合の十分条件の議論も含めて、後ほどに譲る事にして、ここでは、複雑さをさけて、壁方向も一変数として上記の形で考えていこう。まず、 L^2 -well-posedness という言葉から明確にしていこう。本来、 L^2 -well-posedness とは、混合問題についても、次の様な発展方程式 type の解の連続性が成り立つ事である。即ち、初期値をソボレフ space にとった時、任意時間 t 後

の解も初期値に連続的に依存して、同じソボレフ space の中で発展している事を意味するものとしよう。例えば "regularly hyperbolic operator" に対する Cauchy 問題の様にセミグループ的取り扱いが出来る場合はもちろん L^2 -well-posed である。波動方程式に対する Neumann 問題でも右辺 g が 0 の場合にはセミグループ的取り扱いが出来るが、 g が恒等的には 0 でない場合には、むしろ、線型性がないため、セミグループ的扱いは出来ないが、発展方程式 type の評価が得られている (c.f. [2])。[2] の中では、 b, c が real の時に限って、(1) が、発展方程式 type の評価が成り立つ事と、(1) の初期値が 0 の場合 u を $t < 0$ に 0 で延長した ($g=0$ の場合に)

$$(1)' \begin{cases} Pu = f & , x > 0, -\infty < t < \infty \\ Bu = 0 & , x = 0, -\infty < t < \infty \end{cases}$$

の発展方程式 type の評価を時間に関して積分して得られた形に対応する次の評価:

$$(2) \quad \forall |u|_{s,\gamma}^2 \leq \frac{\text{Const.}}{\gamma} |Pu|_{s,\gamma}^2 \quad \text{for } \gamma > 0,$$

$$(\text{:::} |u|_{k,\gamma}^2 = \sum_{|\alpha|+|\beta|+|\gamma|=k} \|\gamma^\alpha D_x^\alpha D_y^\beta D_t^\gamma e^{-\gamma t} u\|_{L^2(x,y,t)}^2)$$

が成立する事とか "同等である事が議論されている。けれども、その同等性は、全体の解析を通じて得られたもので、単に一方から他方が積分して得られるという様なものではない。
 ○ 即ち、 b, c が real の場合、 $c \geq |b|$ という条件を

中立らとして、その同等性が示された。更に例をあげると Cauchy 問題の場合には、発展方程式 type の評価と (2) の評価の同等性は、regularly-hyperbolicity を通して得られるものである。そのようなわけではあるが、 b, c 複素係数の場合にも、とりあえず (2) が成り立つ事をもって L^2 -well posed と呼ぶことにしよう。次の定理を得る。

定理 (1) が L^2 -well-posed であるための必要十分条件は次の 1), 2) が成り立つことである。 ($\alpha = c + b, \beta = c - b$ とおす)

1) $|\operatorname{Re} \alpha| + |\operatorname{Re} \beta| + 0$ ならば

$$A = \begin{pmatrix} 2\operatorname{Re} \alpha & \operatorname{Im}(\bar{\alpha}\beta) \\ \operatorname{Im}(\bar{\alpha}\beta) & 2\operatorname{Re} \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2d_1 & (d_1\beta_2 - \beta_1d_2) \\ (d_1\beta_2 - \beta_1d_2) & 2\beta_1 \end{pmatrix} \geq 0.$$

但し、 $\alpha = d_1 + id_2, \beta = \beta_1 + i\beta_2, d_1, d_2, \beta_1, \beta_2$ real.

2) $|\operatorname{Re} \alpha| + |\operatorname{Re} \beta| = 0$ ならば

$$1 + d_2\beta_2 > 0.$$

又 その時問題 (1) は 発展方程式 type の解の連続性が成り立ち、解の存在定理が成り立つ。

その中で上記の定理の、^{中々}必要条件の部合の証明の方針は次の解で示す。フルヴィッツが常微分方程式の解の安定性の議論をする時に使った本質的にはエルミートの定理「多項式の根がすべて上半空間にある条件」が、ここに偏微分方程

式の議論にも有用な働きをする事が示される。その時異なる点は、後者では、実軸まで引かれた上半空間を問題とする点である。また、エリートノ定理にまで帰着するまでに議論の積み重ねが必要となる。それを要約すれば、いわゆるロバチンスキー determinant に関係して導かれる無理方程式を、双曲型非エーブリッド変換と呼ばれる、等角写像の変換と、branch を指定した平方根の交換により多項式に帰着させる操作が我々の議論の中心となる。

§2. 証明の要点

1. (1)' を Fourier - Laplace 変換をすると

$$(3) \begin{cases} P(\tau, \eta, D_x) \hat{u}(x) = \hat{f}(x) \\ B(\tau, \eta, D_x) \hat{u}(x) \Big|_{x=0} = 0, \end{cases}$$

となる。ここで $\hat{u}(x) = \hat{u}(\tau, \eta, x)$ etc. と略記した。(3)の解を

$$\hat{u}(x) = \int_0^{b_0} G(\tau, \eta, x, x') \hat{f}(x') dx' = G \hat{f}$$

と書こう。更に $G = G_0 + G_c$ と分けて考えよう。

$$G_0 = \frac{1}{2\pi} \int \frac{e^{i(x-x')\xi}}{P(\tau, \eta, \xi)} d\xi$$

$$G_0 \hat{f} = u_0 \text{ と書こう. } u = u_0 + v \text{ とする.}$$

$$(4) \begin{cases} P \hat{v} = 0 \\ B \hat{v} \Big|_{x=0} = B \hat{u}_0 \end{cases} \quad \text{ここ } P = P(\tau, \eta, D_x) \text{ etc.}$$

今 u_0 に対しては.

$$\gamma |u_0|_{1,\gamma}^2 \leq \frac{C}{\gamma} |f|_{0,\gamma}^2 \quad \text{for } \gamma > 0$$

が成り立つ事は良く知られている。それ故 (4) によって

$$(5) \quad \gamma |v|_{1,\gamma}^2 \leq \frac{C}{\gamma} |f|_{0,\gamma}^2 \quad \text{for } \gamma > 0$$

が示されれば、併せて目標となる energy 不等式が出る。
それ故に、(5) を考えれば良い。 $\hat{v} = G_c \hat{f}$ とすれば。

(5) は (Shiota - Agemi [1], R. Sakamoto [3])

$$(6) \quad \|G_c\|_{\mathcal{L}(L^2, L^2)} \left(= \|G_c\|_{L^2(x, x')} \right) \leq \frac{C}{\gamma} \quad \text{for}$$

$$\text{all } (\tau, \eta) \text{ s.t. } |\tau|^2 + |\eta|^2 = 1 \quad \gamma = -\text{Im } \tau > 0.$$

と同値であるか。留数計算等により

$$(7) \quad G_c = e^{-i\gamma \bar{z}_-} e^{i\gamma \bar{z}_+} (\bar{z}_- - \bar{z}_+)^{-1} B(\bar{z}_-) B(\bar{z}_+)^{-1}$$

と計算されるから、(6)の最初の等号が従う。ここで次の波動方程式の根の性質に注意しよう。

$$(8) \quad |\operatorname{Im} \xi_+| |\operatorname{Re} \xi_+| \geq \gamma \quad (\text{positive constant}).$$

証明は略すが、実際計算により確かめる事も出来る。(8)より、(7)を(6)に代入したものの、一行を消去することから来て、結局、(5)と次の事とが同値であることが示せる。

$$(9) \quad \gamma \leq (\operatorname{Im} \xi_+) |B(\xi_+)|$$

(9)式の右辺の $|B(\xi_+)|$ はいわゆるロバチンスキ- determinant と呼ばれるもので、 $\operatorname{Im} \xi_+$ が 0 になるければ、(9)式は、

$|B(\xi_+)|$ のみに対する条件であるが、 $(\operatorname{Im} \xi_+)$ が hyperbolic の場合には、0 になる場合もある。その 0 になる場合(すなわちの時)との境目か、 ξ_+ の singularity を与える所である。

その variety を中心に直接の解析を行う事は、いたがらに複雑さを増すのみであるけれども、何が双曲性に適合した、うまい処理の方法があってしかるべきものと思われる。それから1の最後に言及した事柄である。

2. (9) から従う 定性的な性質として次の事柄に注意しよう.

$$\begin{cases} \text{(I)} & \gamma > 0 \quad \text{ならば} \quad |B(z_+)| \neq 0 \\ \text{(II)} & \{(0, \gamma), 0^2 - \gamma^2 > 0\} \text{ かつ } \gamma = 0 \text{ ならば} \quad |B(z_+)| \neq 0 \\ \text{(III)} & \{(0, \gamma), 0^2 - \gamma^2 < 0\} \text{ かつ } \gamma = 0 \text{ ならば} \quad |B(z_+)| \text{ は } 0 \text{ にも近い.} \end{cases}$$

(I)(II)(III) は (9) が成り立つための 必要条件であるが、(I)(II)(III) とうまく処理する事により、後少し注意すれば、(9) の必要十分条件が導き出せる。さて

$$B(z_+) = \sqrt{z^2 - \gamma^2} + b\gamma - c\tau = 0$$

を考慮しよう。同次性に注意して、

$$(10) \begin{cases} (1) \sqrt{\mu^2 - 1} = c\mu - b, & (\mu = \frac{\tau}{\gamma}, \gamma > 0) \\ (2) \sqrt{\mu^2 - 1} = -(c\mu - b), & (\mu = \frac{\tau}{\gamma}, \gamma < 0) \end{cases}$$

の二つの式を考慮するのが合理的である。(10)式について (I)(II)(III) より 次の事がわかる。

$$(11) \begin{cases} (1) (10), (1) \text{ は } -\operatorname{Im} \mu > 0 \text{ に根を持つ, (I)より} \\ \mu \text{ の real 軸上では } |\mu| > 1 \text{ の根を持つ, (II)より} \end{cases}$$

- (2) (10)の(1) は $-\text{Im } \mu < 0$ に根を持つ。(I)より 更に
 μ の real 軸上で $|\mu| > 1$ なる根を持つ。(II)より
- (3) (10)の(1),(2) 共に μ の real 軸上では $|\mu| \leq 1$ なる根
 を持つともいえる。

(11)の事実を一つの代換式が上半平面に根を持つという条件
 に帰着させよう。このために 次の変換を考える。

$$\mu \longrightarrow z \longrightarrow w$$

(12)
$$\mu = \frac{1-z}{z+1}$$

(13) $w^2 = z$ w : 下半平面 中心に考える。

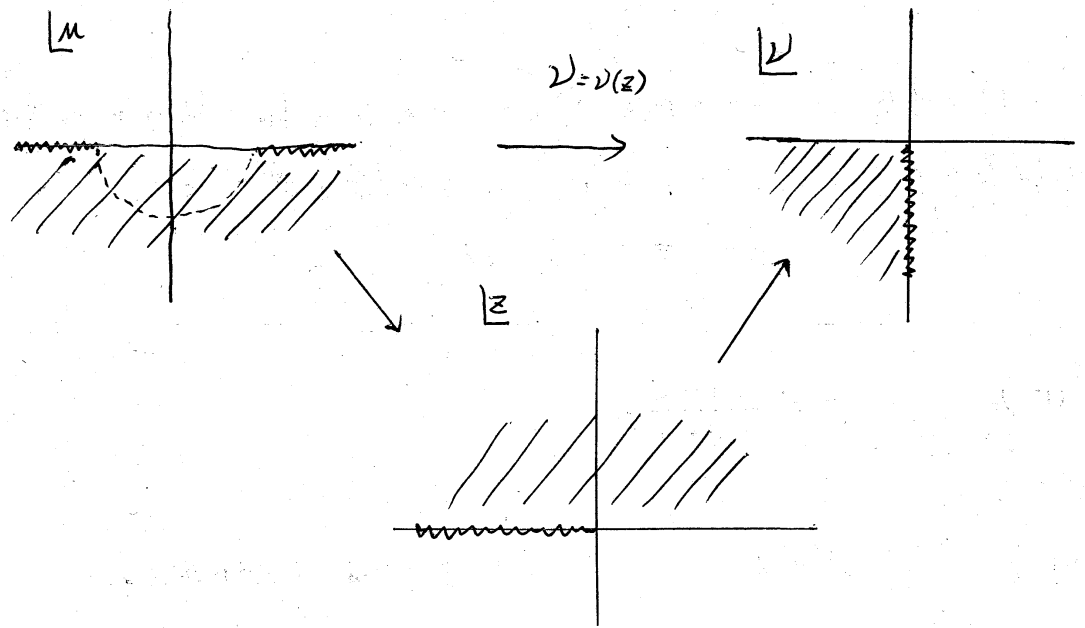
$$\left\{ \begin{array}{ll} (10)の(1)に対して. & z \text{ 上半} \longrightarrow w \text{ 第3象限} \\ (10)の(2)に対して & z \text{ 下半} \longrightarrow w \text{ 第4象限} \end{array} \right.$$

まず(12)の性質をまとめておこう。

- (14) (i) 逆変換も同じ型 $z = \frac{1-\mu}{\mu+1}$ ($\because \mu+1 = \frac{2}{z+1}$)
- (ii) 実軸 \longrightarrow 実軸, $i \longrightarrow -i$ それ故に上半平面
 z 下半平面に移す。
- (iii) 虚軸 \longrightarrow 単位円, $0 \longrightarrow 1$ それ故に 円の内

(部分)を右半平面に移す。

(13)の変換は(1),(2)の場合を別々に考えている。(11)にま
とめた事柄が μ から ν へ変換する事により、どの様に変わる
かを見るために(10)の(1)の場合に対応する図を書こう



斜線の部分 z μ の部分に根を持つ。

他方

$$\mu^2 - 1 = \frac{-4\nu^2}{(\nu^2 + 1)^2}$$

であるが 個々に符号を考察すれば

$$(15) \quad \sqrt{\mu^2 - 1} = \frac{\mp 2i\nu}{\nu^2 + 1} \quad (- \text{は(1)の場合, } + \text{は(2)の場合})$$

(15) より (10) の (1) と共に 同じ式

$$(16) \quad \frac{-2i\nu}{\nu^2+1} = c \left(\frac{1-\nu^2}{\nu^2+1} \right) - b$$

にあり (1) は (16) が 第3象限と下半平面内の虚軸に根を持つ
 ための条件が (11) の (1) に対応する。 (11) の (2) と併せ
 ると (16) が 下半平面に根を持つための条件になる。 (16) 式は
 $\mu = -1$ の所以外 ($\mu = \infty$) では

$$(17) \quad \alpha \nu^2 - 2i\nu - \beta = 0 \quad \alpha = c+b, \quad \beta = c-b$$

と同じであり。上の事は (17) が 上半平面の実軸まで閉じた範囲
 において根を持つ条件に対応する。それを記述するために
 次の Hermite の定理の拡張された形を使う。

Lemma 今 n 次多項式 $f(z) = 0$ の根が real でない複
 素数根を持つとしよう。その時 $f(z) = 0$ の根が
 すべて 上半平面の実軸まで閉じた範囲に存在するための
 必要十分条件は、次の Bezout matrix が non negative
 definite である事である。それは、

$$G(f, -i\bar{f}) = -i \frac{f(x)\bar{f}(y) - f(y)\bar{f}(x)}{x-y} = \sum_{i,k} A_{i,k} x^i y^k$$

$A = (A_{ij})$ は symmetric (real) であるから 次の事が成り立つ。

$$A \geq 0 \iff f(z) \text{ の根 } z_i \quad \text{Im } z_i \geq 0.$$

L

今の場合 $f(z) = \alpha z^2 - z\beta - \beta$ が non-real の複素数
 共役な根を持つ場合の必要十分条件は

$$\text{Re } \alpha = \text{Re } \beta = 0 \text{ かつ } 1 + \alpha_2 \beta_2 < 0$$

の場合に限られる。その場合は除外して。

$$(18) \quad \text{Re } \alpha = \text{Re } \beta = 0 \text{ ならば } 1 + \alpha_2 \beta_2 \geq 0$$

が成り立つ。更に A を具体的に求めると

$$(19) \quad A = \begin{pmatrix} 2 \text{Re } \alpha & \text{Im } (\alpha \beta) \\ \text{Im } (\alpha \beta) & 2 \text{Re } \beta \end{pmatrix} \geq 0$$

となる。即ち α, β が real ならば $\text{Re } \alpha$ と $\text{Re } \beta > 0$ となり前
 の条件に成る。さて以上の課程は $\mu=0$ の場合の考察と
 (9) と (I)(II)(III) の相異を吟味するに依り (9) のための必要
 十分条件 即ち L^2 -well-posed (2)式が成立) なるための必要十分
 条件が与えられる。それは単に (18)式 の ≥ 0 を > 0 にす
 るだけであることが確かめられる。それには 変換式 (12), (13) を個々に
 考察吟味すればわかるが、証明は省こう。上記の結果は

2階双曲型一般に拡張される (y方向に多変数の形式).

References

- [1] R. Agemi - T. Shiota J. Fac. Sci. 21, No. 2 (1970), 133-151.
- [2] S. Miyatake J. Math. Kyoto U. (to appear).
- [3] R. Sakamoto P. R. I. for Math. Sci. Kyoto Univ.
vol. 8, No. 2. (1972), 265 - 293