数理解析研究所講究録
209巻 1974年 106-117

波動方程式に対する混合問題について

京大理　宮武貞夫

§1. 序. 我々は 次の様な波動方程式に対する 初期一境界値問題

$$
(1)\begin{cases}
Pu = (D_x^2 + D_y^2 - D_t^2)\,u = f(x,y,t), & x>0,\ t>0 \\
Bu\big|_{x=0} = (D_x + bD_y - cD_t)\,u\big|_{x=0} = g(y,t), & x=0,\ t>0 \\
D_t^j u\big|_{t=0} = u_j(x,t), \quad (j=0,1), & x>0,\ t=0
\end{cases}
$$

の L^2-well-posedness について考えよう。特にここでは，b, c が 複素定係数の場合の 必要条件について 直接的な形で記述しよう。より一般的な形については，変係数の場合の十分条件の議論も含めて，後ほど に譲る事にして，ここでは，複雑さをさけて，壁方向も一変数として上記の形で考えていこう。まず，L^2-well-posedness という言葉から明確にしていこう。本来，L^2-well-posedness とは，混合問題についても，次の様な 発展方程式 type の 解の連続性が成り立つ事である。即ち，初期値をソボレフ space にとった時，任意時間も後

の解も初期値に連続的に依存して，同じソボレフ space の中で発展している事を意味するものとしよう。例えば regularly hyperbolic operator に対する Cauchy 問題の様にセミグループ的な取り扱いが出来る場合はもちろん L^2-well-posed である。波動方程式に対する Neumann 問題でも右辺 g が 0 の場合にはセミグループ的な扱いが出来るが，g が恒等的には 0 でない場合には もはや線型性がないため，セミグループ的扱いは出来ないが，発展方程式 type の評価が得られている (c.f. [2])．[2] の中では，b，c が real の時に限って，(1) が発展方程式 type の評価が成りたつ事と，(1) の初期値が 0 の場合 u を $t<0$ に 0 で延長した（$g=0$ の場合に）

$$(1)'\begin{cases} Pu=f & ,\ x>0\ ,\ -\infty<t<\infty \\ Bu=0 & ,\ x=0\quad -\infty<t<\infty \end{cases}$$

の発展方程式 type の評価を時間に関して積分して得られた形に対応する次の評価；

$$(2)\quad \gamma|u|^2_{1,\gamma} \leq \frac{\text{Const.}}{\gamma}|Pu|^2_{0,\gamma},\ \text{for } \gamma>0,$$

$$\left(\text{ここに}\quad |u|^2_{k,\gamma} = \sum_{i+j+|\alpha|+\ell=k}\|\gamma^\ell D_x^i D_t^j D_y^\alpha e^{-\gamma t}u\|^2_{L^2(x,y,t)}\right)$$

が成立する事とが同等である事が議論されている。けれども，その同等性は全体の解析を通じて得られたもので，単に一方から他方が積分して得られるという様なものではない。即ち，b，c が real の場合 $c\geq|b|$ という条件を

中立ちとして、その同等性が示された。更に例をあげると Cauchy 問題の場合には、発展方程式 type の評価と (2) の評価の同等性は、regularly-hyperbolicity を通して得られるものである。そのようなわけではあるが、b, c 複素係数の場合にも、とりあえず (2) が成り立つ事でもって L^2-well posed と呼ぶことにしよう。次の定理を得る。

定理. (1) が L^2-well-posed であるための必要十分条件は次の 1), 2) がなりたつことである。 ($\alpha = c+b$, $\beta = c-b$ とする)

1) $|\mathrm{Re}\,\alpha| + |\mathrm{Re}\,\beta| \neq 0$ ならば

$$A = \begin{pmatrix} 2\mathrm{Re}\,\alpha & \mathrm{Im}(\bar{\alpha}\beta) \\ \mathrm{Im}(\bar{\alpha}\beta) & 2\mathrm{Re}\,\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha_1 & (\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2) \\ (\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2) & 2\beta_1 \end{pmatrix} \geq 0.$$

但し $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$, $\beta = \beta_1 + i\beta_2$, $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ real.

2). $|\mathrm{Re}\,\alpha| + |\mathrm{Re}\,\beta| = 0$ ならば

$$1 + \alpha_2\beta_2 > 0.$$

又その時問題 (1) は発展方程式 type の解の連続性が成り立ち、解の存在定理が成り立つ。

その中で上記の定理の、中で主として必要条件の部分の証明の方針を次の節で述べよう。フルヴィッツが常微分方程式の解の安定性の議論をする時に使った本質的にはエルミートの定理「多項式の根がすべて上半空間にある条件」が、ここに偏微分方程

式の議論にも有用な働きをする事が示される。その時異なる点は、後者では、実軸までこめての上半空間を問題とする点である。ただ，エルミートの定理にまで帰着するまでに議論の積み重ねが必要となる。それを要約すれば，いわゆるロバチェフスキー determinant に関係して導かれる無理方程式を，双曲型非ユークリッド変換と呼ばれる，等角写像の変換と，branch を指定した平方根の変換により 多項式に帰着させる操作が我々の議論の中心となる。

§2. 証明の要点

1. (1)$'$を Fourier − Laplace 変換をすると

$$(3)\begin{cases} P(\tau,\eta,D_x)\,\hat{u}(x)=\hat{f}(x) \\ B(\tau,\eta,D_x)\,\hat{u}(x)\Big|_{x=0}=0, \end{cases}$$

となる。ここで $\hat{u}(x)=\hat{u}(\tau,\eta,x)$ etc. と略記した。(3)の解を

$$\hat{u}(x)=\int_0^\infty G(\tau,\eta,x,x')\hat{f}(x')dx'=G\hat{f}$$

と書こう。更に $G=G_0+G_c$ と分けて考えよう。

$$G_0=\frac{1}{2\pi}\int\frac{e^{i(x-x')\xi}}{P(\tau,\eta,\xi)}d\xi$$

$G_0 \hat{f} = u_0$ と書こう。 $u = u_0 + v$ とすると

$$(4) \quad \begin{cases} P\hat{v} = 0 \\ B\hat{v}\big|_{x=0} = B\hat{u}_0 \end{cases} \qquad \text{ここに} \quad P = P(\tau, \eta, D_x) \text{ etc.}$$

今 u_0 に対しては．

$$\gamma |u_0|_{1,\gamma}^2 \leq \frac{C}{\gamma} |f|_{0,\gamma}^2 \quad \text{for } \gamma > a$$

が成り立つ事は良く知られている。それ故 (4) について

$$(5) \quad \gamma |v|_{1,\gamma}^2 \leq \frac{\exists C}{\gamma} |f|_{0,\gamma}^2 \qquad \text{for } \gamma > 0$$

が示されれば，併せて 目標とする energy 不等式が出る。
それ故に，(5) を考えれば良いが． $\hat{v} = G_c \hat{f}$ とすれば．
(5) は (Shirota - Agemi [1]， R. Sakamoto [3])

$$(6) \qquad \| G_c \|_{\mathcal{L}(L^2, L^2)} \left(= \| G_c \|_{L^2(x, x')} \right) \leq \frac{C}{\gamma} \quad \text{for}$$

$$\text{all} \quad (\tau, \eta) \text{ s.t. } |\tau|^2 + |\eta|^2 = 1 \qquad \gamma = -\mathrm{Im}\, \tau > 0.$$

と同値であるが．留数計算等により

$$(7) \qquad G_c = e^{-iy\xi_-} e^{ix\xi_+} (\xi_- - \xi_+)^{-1} B(\xi_-) B(\xi_+)^{-1}$$

と計算されるから，(6)の最初の等号が従う。ここで次の波動方程式の根の性質に注意しよう。

$$(8)\qquad |\mathrm{Im}\,\xi_+||\mathrm{Re}\,\xi_+| \geq {}^{\exists}(\text{positive constant})\,\gamma$$

証明は略すが，実際計算により確かめる事も出来る。(8)より，(7)を(6)に代入したものの，一部を消去することが出来て，結局，(5)と次の事とが同値であることが示せる。

$$(9)\qquad {}^{\exists}(\text{positive constant})\,\gamma \leq (\mathrm{Im}\,\xi_+)\,|B(\xi_+)|$$

(9)式の右辺の $|B(\xi_+)|$ はいわゆるロパチンスキー determinant と呼ばれるもので，$\mathrm{Im}\,\xi_+$ が 0 にならなければ，(9)式は，$|B(\xi_+)|$ のみに対する条件であるが，$(\mathrm{Im}\,\xi_+)$ が hyperbolic の場合には，0 になる場合もある。その 0 にならない場合（$\gamma \downarrow 0$ の時）との境い目が，ξ_+ の singularity を与える所である。その variety を中心に直接の解析を行う事は，いたずらに複雑さを増すのみであるけれども，何か双曲性に適合した，うまい処理の方法があってしかるべきものと思われる。それが§1の最後に言及した事柄である。

2. (9) から従う定性的な性質として次の事柄に注意しよう。

$$
\begin{cases}
(\mathrm{I}) & \gamma>0 \quad \text{ならば} \quad |B(\xi_+)|\neq 0 \\
(\mathrm{II}) & \{(\sigma,\eta),\ \sigma^2-\eta^2>0\} \ \text{かつ}\ \gamma=0 \ \text{なら} \quad |B(\xi_+)|\neq 0 \\
(\mathrm{III}) & \{(\sigma,\eta),\ \sigma^2-\eta^2<0\} \ \text{かつ}\ \gamma=0 \ \text{では} \quad |B(\xi_+)| \ \text{は}\ 0\ \text{でも良い。}
\end{cases}
$$

(I)(II)(III) は (9) が成りたつための必要条件であるが、(I)(II)(III) をうまく処理する事により、後少し注意すれば、(9) の必要十分条件が導き出せる。さて

$$B(\xi_+) = {}^{+}\sqrt{\tau^2-\eta^2} + b\eta - c\tau = 0$$

を考えよう。同次性に注意して、

$$
(10)\begin{cases}
(1)\ {}^{+}\sqrt{\mu^2-1} = c\mu - b, & \left(\mu=\dfrac{\tau}{\eta},\ \eta>0\right) \\[2ex]
(2)\ {}^{+}\sqrt{\mu^2-1} = -(c\mu-b), & \left(\mu=\dfrac{\tau}{\eta},\ \eta<0\right)
\end{cases}
$$

の二つの式を考えるのが合理的である。(10)式について、(I)(II)(III)より次の事がなりたつ。

(11) ① (10), (1) は $-\mathrm{Im}\,\mu>0$ に根を持たない。((I)より)
μ の real 軸上では $|\mu|>1$ の根を持たない。((II)より)

(2). (10)の(1) は $-\mathrm{Im}\,\mu<0$ に根を持たない。((I)より) 更に μ の real 軸上で $|\mu|>1$ なる根を持たない。((II)より)

(3). (10)の(1),(2) 共に μ の real 軸上では $|\mu|\leq 1$ なる根を持っても良い。

(11)の事実を 一つの代数式が上半平面に根を持つという条件に帰着させよう。そのために 次の変換を考える。

$$\mu \longrightarrow z \longrightarrow \nu$$

(12) $$\mu=\frac{1-z}{z+1}$$

(13) $$\nu^2=z$$ ν: 下半平面中心に考える。

(10)の(1)に対して z 上半 $\longrightarrow$ ν 第3象限

(10)の(2)に対して z 下半 $\longrightarrow$ ν 第4象限

まず(12)の性質をまとめておこう。

(14)

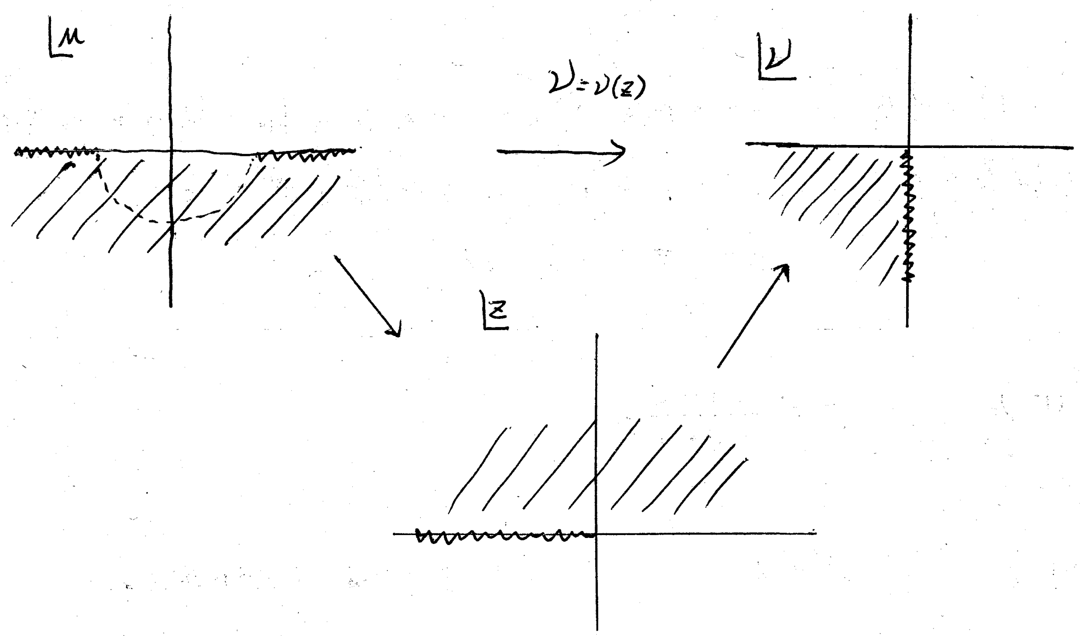
(i) 逆変換も同じ型 $z=\frac{1-\mu}{\mu+1}$ $\left(\because\ \mu+1=\frac{2}{z+1}\right)$

(ii) 実軸 $\longrightarrow$ 実軸, $i\longrightarrow -i$ それ故に上半平面を下半平面に移す。

(iii) 虚軸 $\longrightarrow$ 単位円, $0\longrightarrow 1$ それ故に 円の内

部を右半平面に移す。

(13)の変換は (1),(2)の場合を別々に考えている。(11)にまとめた事柄が u から v へ変換する事により、どの様に変わるかをみるために (10)の(1)の場合に対応する図を書こう



斜線の部分及び ~~~~ の部分に根を持たない。

他方

$$u^2-1=\frac{-4v^2}{(v^2+1)^2}$$

であるが個々に符号を考察すれば

(15)、 $\sqrt[+]{u^2-1}=\dfrac{\mp 2iv}{v^2+1}$ (ーは(1)の場合、+は(2)の場合)

(15) より (10)の(1)(2)共に同じ式

$$(16) \qquad \frac{-2i\nu}{\nu^2+1} = c\left(\frac{1-\nu^2}{\nu^2+1}\right) - b$$

になり (1)は(16)が第3象限と下半平面内の虚軸に根を持たないという条件が(11)の(1)。に対応する。(11)の(2)。と併せると(16)が下半平面に根を持たないという事になる。(16)式は $z=-1$の所以外 ($\mu=\infty$) では

$$(17) \qquad \alpha\nu^2 - 2i\nu - \beta = 0 \qquad \alpha = c+b, \quad \beta = c-b$$

と同じであり、上の事は(17)が上半平面の実軸までこめての範囲にすべての根を持つ条件に対応する。それを記述するために次のHermiteの定理の拡張された形を使おう。

Lemma 今 n次 多項式 $f(z)=0$ の根が realでない複素共役な根を持たないとしよう。その時 $f(z)=0$の根がすべて上半平面の実軸までこめての範囲に存在するための必要十分条件は、次の Bezout matrix が non negative definite である事である。それは、

$$G(f, -i\bar{f}) = -i\,\frac{f(x)\bar{f}(y) - f(y)\bar{f}(x)}{x-y} = \sum_{i,k}^{0\ n-1} A_{ik}\,x^i y^k$$

$A = (A_{ik})$ は simmetric (real) であるが 次の事が成りたつ.

$A \geq 0 \iff f(z)$ の根 z_i $\quad \mathrm{Im}\, z_i \geq 0$.

今の場合 $f(\nu) = \alpha\nu^2 - 2i\nu - \beta$ が non real な複素共役な根を持つ場合の必要十分条件は

$$\mathrm{Re}\,\alpha = \mathrm{Re}\,\beta = 0 \text{ で } \quad 1 + \alpha_2\beta_2 < 0$$

の場合に限られる. その場合は除外して,

(18) $\mathrm{Re}\,\alpha = \mathrm{Re}\,\beta = 0$ ならば $\quad 1 + \alpha_2\beta_2 \geq 0$

が従う。更に A を具体的に求めると

(19) $$A = \begin{pmatrix} 2\,\mathrm{Re}\,\alpha, & \mathrm{Im}(\bar{\alpha}\beta) \\ \mathrm{Im}(\bar{\alpha}\beta) & 2\,\mathrm{Re}\,\beta \end{pmatrix} \geq 0$$

となる. 即ち α, β が real ならば. $\mathrm{Re}\,\alpha$ 及び $\mathrm{Re}\,\beta > 0$ となり 前の条件になる。さて 以上の課程は. $\mu = \omega$ の場合の考察と (9) と (I)(II)(III) の相関を吟味することにより (9)のための必要十分条件 即ち L^2-well-posed ((2)式が成立) なるための必要十分条件が与えられる。それは単に(18)式の ≥ 0 を > 0 にするだけであることが確かめられる. それには, 変換式 (12), (13) を個々に考察吟味すればわかるが, 証明は省こう。上記の結果は

2階双曲型一般に拡張される（y方向も多変数の形で）。

Références

[1] R. Agemi - T. Shirota J. Fac. Sci. 21. No. 2 (1970), 133-151.

[2]. S. Miyatake J. Math. Kyoto. U. (to appear).

[3] R. Sakamoto P. R. I. for Math. Sci. Kyoto Univ. vol. 8. No. 2. (1972). 265 – 293