数理解析研究所講究録
209巻 1974年 100-105

解析的汎函数の支台について．
（Björkの結果をめぐって）

上智大 理工 森本光生

§0 記号

V を Stein 多様体，$K \subset V$ をコンパクトとする．

$$\hat{K} = \{y \in V;\ |f(y)| \leq \sup_{x \in K} |f(x)|,\ \forall f \in \mathcal{O}(V)\}$$

とおけば，$\hat{K}$ もコンパクトである。$\hat{K}$ を K の $\mathcal{O}(V)$-凸包といい，$K = \hat{K}$ のとき，K は $\mathcal{O}(V)$-凸であるという。

W を V の開集合とする。W が $\mathcal{O}(V)$-凸であるとは，

$$\forall K \subset W \text{ コンパクト} \Rightarrow \hat{K} \subset W \text{ コンパクト}.$$

と定義する。いま，

$$\tilde{W} = \bigcup \{\hat{K};\ K \subset W \text{ コンパクト}\}$$

とおく。$\tilde{W}$ は V の開集合で，W を含む最小の $\mathcal{O}(V)$-凸開集合である。

W を V の開集合としたとき，$\mathcal{O}(W)$ に FS 空間の位相を入れる。K を V のコンパクトとしたとき，$\mathcal{O}(K) = \lim\mathrm{ind}\{\mathcal{O}(W);\ W \supset K\}$ に DFS 空間の位相を入れる．

解析的汎函数 $T \in \mathcal{O}(V)'$ が開集合 W を支台 (porteur) に持つとは，$T_0 \in \mathcal{O}(W)'$ が存在して，

$$T = {}^t r(T_0)$$

となることをいう。ただし，${}^t r$ は連続写像

$$r : \mathcal{O}(V) \longrightarrow \mathcal{O}(W)$$

に双対な写像である。同様に $T \in \mathcal{O}(V)'$ がコンパクト K を支台にもつとは，$T_1 \in \mathcal{O}(K)'$ が存在して

$$T = {}^t\rho\ (T_1)$$

となることをいう。ただし，${}^t\rho$ は連続写像

$$\rho : \mathcal{O}(V) \longrightarrow \mathcal{O}(K)$$

に双対な写像である。

ここで問題にしたいことは次のことである：$T \in \mathcal{O}(V)'$ が W を支台にもつことと $\tilde{W}$ を支台にもつこととは同値であることが知られている。(以下を見よ。) では，$T \in \mathcal{O}(V)'$ がコンパクト K を支台にもつことと，$\tilde{K}$ を支台にもつこととは同値であろうか？ Martineau [1] には，コンパクトの場合について問題の解析がなされているが，完全な解答は与えられていない。Bjork [1] は $V = \mathbb{C}^n$ の場合，答は肯定的であることを証明した。この辺の消息について，いくつかのコメントをすることが本論の目的である。

§1 既知の結果

定理1. $K=\hat{K}$ であれば，制限写像

$$\mathcal{O}(V) \longrightarrow \mathcal{O}(K)$$

は稠密な像をもつ．(Oka - Cartan)

系2. $W=\tilde{W}$ であれば，制限写像

$$\mathcal{O}(V) \longrightarrow \mathcal{O}(W)$$

は稠密な像をもつ．

命題3 制限写像

$$\mathcal{O}(\tilde{W}) \longrightarrow \mathcal{O}(W)$$

は単射的で，閉じた像をもつ。また，像は $\mathcal{O}(V)$ の $\mathcal{O}(W)$ における閉包と一致する。(Martineau)

命題3とHahn-Banachの定理により，次の定理を得る。

定理4 Wをスタイン多様体Vの開集合とする。$T\in\mathcal{O}(V)'$ が $\tilde{W}$を支台にもてば，Wを支台にもつ。$\tilde{W}\supset W$ であるから逆は自明に成立する。

定理4のコンパクトの場合の類似が成立するかを問題にするのだが，まず定理4の直接の系を1つみちびいておく。

定義5 $T\in\mathcal{O}(V)'$ がコンパクトKを弱支台に持つとは，Kのすべての開近傍を支台に持つことである．Kが$T\in\mathcal{O}(V)'$の支台であれば，弱支台であることは明らかである。

$\mathcal{U}$がKの開近傍の全体を動くとき，$\tilde{\mathcal{U}}$は$\tilde{K}$の開近傍の基底をなすから，系2より，次がいえる．

命題6　Kが$\mathcal{O}(V)$-凸，$K=\tilde{K}$とする。このとき，Kが$T\in\mathcal{O}(V)'$の弱支台であれば，支台である。

定理4の系として，次が成立する。

系7　KをVのコンパクトとする。$T\in\mathcal{O}(V)'$が$\tilde{K}$を支台にもてば，Kを弱支台にもつ。逆も成立する。

§2　良いコンパクト集合．

定義8　Vのコンパクト集合Kが良いコンパクトであるとは，$T\in\mathcal{O}(V)'$が$\tilde{K}$を支台にもてば，Kを支台にもつことと定める。（Vに依存する概念である．）

明らかにKが良いコンパクトであるための必要十分条件は，

$$\mathcal{O}(K)' \longrightarrow \mathcal{O}(\tilde{K})'$$

が全射となることである。そのためには$\mathcal{O}(\tilde{K})$が$\mathcal{O}(K)$の閉じた部分空間とみなせることが必要十分であるが，すぐに示せることは，次のことである。

命題9　制限写像

$$\mathcal{O}(\tilde{K}) \longrightarrow \mathcal{O}(K)$$

は単射で，その像は，$\mathcal{O}(V)$の~~$\mathcal{O}(K)$~~ Kへの制限よりなるコ

ーシー列の極限の全体と一致する。

$K \subset V$が良いコンパクトになるための条件をあげよう。

命題10　$K \subset V$コンパクトに対し，次の条件は同値である。

a)　KはVの良いコンパクトである.

b)　$\mathcal{O}(\tilde{K})$は$\mathcal{O}(K)$の閉部分空間とみなせる。

c)　$\mathcal{O}(\tilde{K})$は$\mathcal{O}(V)$の$\mathcal{O}(K)$における閉包と一致する。

d)　Kの任意の近傍に対し，$\tilde{K}$の近傍$\tilde{U}$が存在して，

$$\mathcal{O}(W) \cap \mathcal{O}(\tilde{K}) \subset \mathcal{O}(\tilde{U})$$

となる。ここで，上の空間はすべて$\mathcal{O}(K)$の部分とみなされている。

MartineauはKが良いコンパクトとなるための，次の十分条件を与えた。

定理11　$[0,1]$から$\tilde{K}$の中への写像の同程度連続な族Φが存在して，$\forall y \in \tilde{K}$　$\exists \varphi \in \Phi$ s.t.

$$\varphi(0) = y, \quad \varphi(1) \in K$$

をみたすとすれば，KはVの良いコンパクト集合である。

Bjorkは次の定理を証明した。

定理12　$V = \mathbb{C}^n$とし，トルダ〜は$\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$に関してとるとする。$K \subset \mathbb{C}^n$をコンパクトとし，$W$を$K$の開近傍とすれば，$U$なる$K$の開近傍を見付けて，

$$\mathcal{O}(W)\cap\mathcal{O}(\tilde{K})\subset\mathcal{O}(\tilde{U})$$

とできる。

命題10とくみ合わせれば次の系を得る：

系13　$\mathbb{C}^n$のコンパクト集合は，すべて，（$\mathbb{C}^n$の）良いコンパクト集合である。さらに，Vを$\mathbb{C}^n$の多項式凸な閉集合とすれば，Vのコンパクト集合はすべて（Vの）良いコンパクト集合である。

Bjorkの証明法は，Vが$\mathbb{C}^n$の線型凸な閉集合である場合にも適用できるであろう。

文献：

Martineau, Sur les fonctionnelles analytiques et la transformation de Fourier-Borel. J. Analyse Math. 9, 1–164 (1963)

定理11まではすべてこの論文に書いてある。

Bjork, Every compact set in $\mathbb{C}^n$ is a good compact set. Ann. Inst. Fourier, Grenoble 20 493–498 (1970)

定理12の証明が書いてある。uniform algebraの手法を用いる。