

解析的汎函数の支台について。
(Bjorkの結果をめぐって)

上智大 理工 森本光生

§0 記号.

$V \in$ Stein 多様体, $K \subset V$ $\exists \gamma = 11^\circ \text{ト}$ とする.

$$K = \{y \in V; |f(y)| \leq \sup_{x \in K} |f(x)|, \forall f \in \mathcal{O}(V)\}$$

とすれば, \tilde{K} も $\gamma = 11^\circ \text{ト}$ である. $\tilde{K} \in K$ の $\mathcal{O}(V)$ -凸であること, $K = \tilde{K}$ のとき, K は $\mathcal{O}(V)$ -凸であるという.

$W \in V$ の開集合とする. W が $\mathcal{O}(V)$ -凸であるとは,

$$\forall K \subset W \exists \gamma = 11^\circ \text{ト} \Rightarrow \tilde{K} \subset W \exists \gamma = 11^\circ \text{ト}$$

と定義する. いま,

$$\tilde{W} = \bigcup \{ \tilde{K}; K \subset W \exists \gamma = 11^\circ \text{ト} \}$$

とすれば, \tilde{W} は V の開集合で, $W \in$ 含む最小の $\mathcal{O}(V)$ -凸開集合である.

$W \in V$ の開集合として, $\mathcal{O}(W)$ は FS 空間の位相を成す. $K \in V$ の $\gamma = 11^\circ \text{ト}$ として, $\mathcal{O}(K) = \lim \text{ind} \{ \mathcal{O}(W); W \supset K \}$ は DFS 空間の位相を成す.

/

解析的汎函数 $T \in \mathcal{O}(U)'$ が開集合 $W \in \underline{\text{支台}}(\text{porter})$ に持つとは, $T_0 \in \mathcal{O}(W)'$ が存在して,

$$T = \tau_W(T_0)$$

と表すことをいう。ただし, τ_W は連続写像

$$\tau_W: \mathcal{O}(U) \rightarrow \mathcal{O}(W)$$

に双対写像である。同様に $T \in \mathcal{O}(U)'$ がコンパクト $K \in \underline{\text{支台}}$ に持つとは, $T_1 \in \mathcal{O}(K)'$ が存在して,

$$T = \tau_K(T_1)$$

と表すことをいう。ただし, τ_K は連続写像

$$\tau_K: \mathcal{O}(U) \rightarrow \mathcal{O}(K)$$

に双対写像である。

== 2 問題にしたいことは次のことである: $T \in \mathcal{O}(U)'$ が W を支台にもつことと \tilde{W} を支台にもつことは同値であることが知られている。(以下を見よ。) では, $T \in \mathcal{O}(U)'$ がコンパクト K を支台にもつことと, \tilde{K} を支台にもつことは同値であろうか? Martineau [1] には, コンパクトの場合について問題の解析がなされているが, 完全な解答は与えられていない。Bjork [1] は $V = \mathbb{C}^n$ の場合, 答は肯定的であることを証明した。この辺りの消息について, いくつかのコメントとあることが本論の目的である。

§1 既知の結果

定理1. $K = \tilde{K}$ であれば, 制限写像

$$\mathcal{O}(V) \longrightarrow \mathcal{O}(K)$$

は稠密写像をもつ. (Oka-Cartan)

系2. $W = \tilde{W}$ であれば, 制限写像

$$\mathcal{O}(V) \longrightarrow \mathcal{O}(W)$$

は稠密写像をもつ.

命題3 制限写像

$$\mathcal{O}(\tilde{W}) \longrightarrow \mathcal{O}(W)$$

は単射射影 \mathcal{T} , 閉じた像をもつ. $\mathcal{T}E$, 像は $\mathcal{O}(V)$ の $\mathcal{O}(W)$

における閉包と一致する. (Martineau)

命題3と Hahn-Banach の定理により, 次の定理を得る.

定理4 $W \in$ スター-条件付 \mathcal{U} の開集合とある. $T \in \mathcal{O}(V)'$ が \tilde{W} を支台にもつば, W を支台にもつ. $\tilde{W} \supset W$ であるから逆は自明に成立する.

定理4のユニボックトの場合の類似が成立するかと同題にあるのだが, 本定理4の直接の系としてみらうこととする.

定義5 $T \in \mathcal{O}(V)'$ がユニボックト K を弱支台に持つとは, K のすべての開近傍を支台に持つことである. K が $T \in \mathcal{O}(V)'$ の支台であれば, 弱支台であることは明らかである.

W が K の閉近傍の全体を動くとき, \tilde{W} は \tilde{K} の閉近傍の基底をなすから, 系2より, 次が成り立つ.

命題6 K が $\mathcal{O}(U)$ -凸, $K = \tilde{K}$ とする. π のとき, K が $T \in \mathcal{O}(U)'$ の弱支台であれば, 支台である.

定理4の系として, 次が成立する.

系7 $K \in V$ の π -コンパクトとする. $T \in \mathcal{O}(U)'$ が \tilde{K} の支台にもなれば, K の弱支台にもなる. 逆も成立する.

§2 良 π -コンパクト集合.

定義8 V の π -コンパクト集合 K が良 π -コンパクトであるとは, $T \in \mathcal{O}(U)'$ が \tilde{K} の支台にもなれば, K の支台にもなることと定める. (V に依存する概念である.)

明らかに K が良 π -コンパクトであるための必要十分条件は,

$$\mathcal{O}(K)' \longrightarrow \mathcal{O}(\tilde{K})'$$

が全射と成ることである. そのためには $\mathcal{O}(\tilde{K})$ が $\mathcal{O}(K)$ の閉 π -部分空間を同じにする必要十分であるが, 可 π を示せることは, 次のことである.

命題9 制限写像

$$\mathcal{O}(\tilde{K}) \longrightarrow \mathcal{O}(K)$$

は単射射で, その像は, $\mathcal{O}(V)$ の $\mathcal{O}(K)$ の制限 π による.

一列の極限の全体と一致する。

$K \subset V$ が良い \mathbb{C} - \mathbb{P}^n に存在するための条件をあげよう。

命題 10 $K \subset V$ に対し、次の条件は同値である。

- a) $\forall a$
 K は良い \mathbb{C} - \mathbb{P}^n である。
 b) $\mathcal{O}(\tilde{K})$ は $\mathcal{O}(K)$ の閉部分空間とみなせる。
 c) $\mathcal{O}(\tilde{K})$ は $\mathcal{O}(V)$ の $\mathcal{O}(K)$ における閉包と一致する。
 d) K の任意の近傍に対し、 \tilde{K} の近傍 \tilde{U} が存在して、
 $\mathcal{O}(W) \cap \mathcal{O}(\tilde{K}) \subset \mathcal{O}(\tilde{U})$

と存在。すなわち、 K の空間はすべて $\mathcal{O}(K)$ の部分とみなされる。

Martineau は K が良い \mathbb{C} - \mathbb{P}^n と存在するための、次の十分条件を与えた。

定理 11 $[0, 1]$ から \tilde{K} の中への写像の同程度連続な族 Φ が存在して、 $\forall y \in \tilde{K} \exists \varphi \in \Phi$ のように

$$\varphi(0) = y, \quad \varphi(1) \in K$$

とみられるならば、 K は V の良い \mathbb{C} - \mathbb{P}^n 集合である。

Bjerk は次の定理を証明した。

定理 12 $V = \mathbb{C}^n$ とし、 $\forall \epsilon > 0 \sim$ は $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ に閉じて存在する。 $K \subset \mathbb{C}^n$ が \mathbb{C} - \mathbb{P}^n であり、 $W \in K$ の近傍とみられるならば、 \exists 近傍 U が存在して、 U における K の近傍を見付け、

$$\mathcal{O}(W) \cap \mathcal{O}(K) \subset \mathcal{O}(\tilde{U})$$

とできる。

命題10とくみ合わせれば次の系を得る:

系13 \mathbb{C}^n のコンパクト集合は、すべて、 \mathbb{C}^n の良好なコンパクト集合である。さらに、 $V \subset \mathbb{C}^n$ の多項式凸包閉集合とすれば、 V のコンパクト集合はすべて良好なコンパクト集合である。
(Va)

Bjork の証明法は、 V が \mathbb{C}^n の整型凸包閉集合である場合にも適用できるであろう。

文献

Martineau, Sur les fonctionnelles analytiques et la transformation de Fourier-Borel.

J. Analyse Math. 9, 1-164 (1963)

定理11#2 はすべてこの論文に書いてある。

Bjork, Every compact set in \mathbb{C}^n is a good compact set. Ann. Inst. Fourier, Grenoble 20 493-498 (1970)

定理12 の証明が、書いてある。uniform algebra の手法を用いる。