

$\mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n \times \mathbb{R}$ での基本原理

東大 理 大島 利雄

§0. 序

本稿では，“コンパクト多様体 \times 時間” における大域的な線型偏微分方程式論の最も簡単な例として，“ $\mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n \times \mathbb{R}$ ” での定数係数線型偏微分方程式（ある種の合成積方程式も含めて）の一般論を扱う。具体的には，可解性，同次解の表示，解の正則性，解の一貫性，初期値問題，境界値問題等を扱う。

§1. 定義と記号

$$\cdot T^n \equiv \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n \equiv \mathbb{R}^n / \sim$$

ただし， $x = (x_1, \dots, x_n)$ ， $x' = (x'_1, \dots, x'_n) \in \mathbb{R}^n$ に対し， $x'_i = x_i + 2\pi \alpha_i$ を満たす $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n$ が存在する時， $x \sim x'$ と定義する。

$$\cdot I = (a, b) \subset \mathbb{R} : \text{開区間} \quad (-\infty \leq a < 0 < b \leq \infty)$$

I の元を t で表わす。

$$\cdot M \equiv T^n \times I$$

$$\cdot \pi : \begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & I \\ \downarrow & & \downarrow \\ (x, t) & \longrightarrow & t \end{array} \quad \text{projection}$$

• $\mathcal{A}(M)$: M 上の実解析函数全体.

$$\cdot \mathcal{A}(\bar{M}) \equiv \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathcal{A}(T^n \times (a-\varepsilon, b+\varepsilon))$$

• $\mathcal{O}(I \times i\mathbb{R})$: $I \times i\mathbb{R}$ 上の正則函数全体

• $\mathcal{B}(M)$: M 上の hyperfunction 全体

$$\cdot \mathcal{B}_0 \equiv \{g \in \mathcal{B}(M); \text{supp } g \subset \pi^{-1}(0)\}$$

すべての $g \in \mathcal{B}_0$ は

$$(1.1) \quad \begin{aligned} g &= \sum_{i \geq 0} g_i(x) \delta^{(i)}(t) \quad (g_i \in \mathcal{B}(T^n)) \\ &= \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{Z}^n \\ i \geq 0}} \tilde{g}_i(\alpha) e^{\sqrt{-1} \langle \alpha, x \rangle} \delta^{(i)}(t) \quad (\tilde{g}_i \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}^n}) \end{aligned}$$

と展開される. ただし,

$$(1.2) \quad \overline{\lim}_{|\alpha|+i \rightarrow \infty} \sqrt{|\alpha|+i} |\tilde{g}_i(\alpha)| C^i \leq 1 \quad \text{for } \forall C > 0.$$

• $\text{ord } g \equiv \min \{k \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}; g_j(x) \equiv 0 \text{ for } \forall j > k\}$

• $\mathcal{B}_0^f \equiv \{g \in \mathcal{B}_0; \text{ord } g < \infty\}$

以下, $g \in \mathcal{B}_0^f$ とする.

• $|g|_\alpha \equiv \max_{i \geq 0} |\tilde{g}_i(\alpha)|$ (cf. (1.1))

• $T_j(\alpha, g)$ ($1 \leq j \leq m_\alpha$) を τ に関する次の方程式

$$\sum_i \tilde{g}_i(\alpha) (\sqrt{-1} \tau)^i = 0$$

の根達とする. ($0 \leq m_\alpha \leq \text{ord } g$ である)

・合成積による写像

$$g_* : f \mapsto (2\pi)^{-n} \int g(x', t') f(x-x', t-t') dx' dt'$$

によって, B_0^\dagger は環をなし, $\mathcal{A}(M)$, $\mathcal{A}(\bar{M})$, $\mathcal{B}(M)$ はすべて B_0^\dagger -加群となる. 上のようにして与えられる写像は, 任意の有限階定数係数偏微分作用素による写像を含んでいることに注意しよう.

・ $\text{Mat}(k, B_0^\dagger)$: B_0^\dagger の元を成分とする k 次正方行列.

定理 1.1. $f \in \mathcal{B}(M)$ は次のような表示をもつ.

$$(1.3) \quad f = \left[\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} F_\alpha(z) e^{\sqrt{1} \langle \alpha, x \rangle} \right]$$

ただし, $F_\alpha \in \mathcal{O}(I \times \sqrt{1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}))$ で,

$$\overline{\lim}_{|\alpha| \rightarrow \infty} \sqrt{|\alpha|} |F_\alpha|_K \leq 1, \quad \forall K : \text{compact} \subset I \times \sqrt{1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$$

$f = 0$ となるためには, $F_\alpha \in \mathcal{O}(I \times \sqrt{1}\mathbb{R})$ で,

$$\overline{\lim}_{|\alpha| \rightarrow \infty} \sqrt{|\alpha|} |F_\alpha|_K \leq 1, \quad \forall K : \text{compact} \subset I \times \sqrt{1}\mathbb{R}$$

を満たすことが, 必要十分.

$$\text{ここで, } |F_\alpha|_K \equiv \sup_{z \in K} |F_\alpha(z)|$$

注意 1.2. (1.3)において, F_α の定義する $\mathcal{B}(I)$ の元は,
 $(2\pi)^{-n} \int_{T^n} f(x, t) e^{-\sqrt{|t|} \langle \alpha, x \rangle} dx$ によって与えられるが,
 これらがすべての $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ に対して 0 であっても, f が 0 で
 あるとは限らない. 逆に, すべての $\{f_\alpha(x)\}_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$ ($f_\alpha \in$
 $\mathcal{B}(I)$) に対して, $f_\alpha(x) = (2\pi)^{-n} \int_{T^n} f(x, t) e^{-\sqrt{|t|} \langle \alpha, x \rangle} dx$
 となる $f \in \mathcal{B}(M)$ が存在する.

定義 1.3. $f \in \mathcal{B}(M)$ が $\pi^{-1}(t_0)$ ($t_0 \in I$) に制限可
 能な時 (すなわち, $S.S. f \cap \sqrt{|t|} S_{\pi^{-1}(t_0)}^* M = \emptyset$), その
 制限を $f|_{\pi^{-1}(t_0)}$ と書く. $t \in I$ が a に十分近い時 $f|_{\pi^{-1}(t)}$
 が存在し, さらに, $t \rightarrow a$ の時, $\mathcal{B}(T^n)$ の位相で $f|_{\pi^{-1}(t)}$
 が収束するならばその極限を $f|_{\pi^{-1}(a)}$ と書き, f の $\pi^{-1}(a)$ へ
 の trace が存在すると定義する.

§2. 結果

以下, $f \in \text{Mat}(k, \mathcal{B}_0^f)$ とする.

定理 2.1. $f^* : (\mathcal{B}_0^f)^k \longrightarrow (\mathcal{B}_0^f)^k$ が injective
 \Leftrightarrow
 (A.1) $|\det f|_\alpha \neq 0, \quad \forall \alpha \in \mathbb{Z}^n$

定理 2.2. $f^* : (\mathcal{B}_0^f)^k \longrightarrow (\mathcal{B}_0^f)^k$ が surjective
 \Leftrightarrow
 $\text{ord}(\det f) = 0$ かつ (A.1) かつ

$$(A.2.) \quad \lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} \sqrt[|\alpha|]{|\det f|_\alpha} \geq 1$$

定理 2.3. (解の一意性)

$f^* : \mathcal{B}(M)^k \rightarrow \mathcal{B}(M)^k$ が injective

\Leftrightarrow

$\text{ord}(\det f) = 0$ かつ (A.1) かつ

$$(A.3) \quad \lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} \sqrt[|\alpha|]{|\det f|_\alpha} > 0$$

特に, $f, f' \in \mathcal{B}_0^f$ の時は, (i.e. $k=1$)

$\ker(f^*) \subset \ker(f'^*)$

\Leftrightarrow

$|f|_\alpha = 0 \Rightarrow |f'|_\alpha = 0$ かつ

$$\lim_{\substack{|\alpha| \rightarrow \infty \\ |f'|_\alpha \neq 0}} \sqrt[|\alpha|]{|f|_\alpha / |f'|_\alpha} > 0$$

注意 2.4. $f^* : \mathcal{A}(M)^k \rightarrow \mathcal{A}(M)^k$ が injective

\Leftrightarrow

$\text{ord}(\det f) = 0$ かつ (A.1)

定理 2.5. (可解性)

$f^* : \mathcal{B}(M)^k \rightarrow \mathcal{B}(M)^k$ が surjective

\Leftrightarrow

(A.1) かつ (A.2) が成立.

特に, $f, f' \in \mathcal{B}_0^f$ の時は,

$\text{im}(f^*) \supset \text{im}(f'^*)$

\Leftrightarrow

$$\lim_{\substack{|\alpha| \rightarrow \infty \\ |f'|_\alpha \neq 0}} \sqrt[|\alpha|]{|f|_\alpha / |f'|_\alpha} \geq 1 \quad \text{かつ} \quad |f|_\alpha = 0 \Rightarrow |f'|_\alpha = 0$$

注意 2.6. 定理 2.5 は, \bar{M} が compact ならば, $\mathcal{B}(M)$ を $\mathcal{Q}(\bar{M})$ に置き換えてもそのまま成立する. $\mathcal{Q}(M)$ の場合はどうなるか?

\bar{M} が compact の時, $\varphi_i(x) \in \mathcal{Q}(T^n)$ ならば,

$$\left(\sum_{0 \leq i \leq k} \varphi_i(x) \delta^{(i)}(t) \right) * \mathcal{Q}(\bar{M}) \subsetneq \mathcal{Q}(\bar{M})$$

であるが, $\bigcup_{\varphi \in \mathcal{Q}(T^n)} (\varphi(x) \delta(t) * \mathcal{Q}(\bar{M})) = \mathcal{Q}(\bar{M})$

定理 2.7. (同次解の表示)

$$f = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{Z}^n \\ i \geq 0}} \tilde{f}_i(\alpha) e^{\sqrt{t} \langle \alpha, x \rangle} \delta^{(i)}(t) \in \text{Mat}(k, \mathcal{B}_0^f) \text{ が}$$

(A.3) を満たす.

$\Leftrightarrow f * u = 0$ を満たす $\forall u \in \mathcal{B}(M)^k$ は, 次のように表わすことができる. (cf. (1.3))

$$u = \left[\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} U_\alpha(z) e^{\sqrt{t} \langle \alpha, x \rangle} \right] \text{ において}$$

$$\sum_{i \geq 0} \tilde{f}_i(\alpha) \left(\frac{d}{dz} \right)^i U_\alpha(z) = 0, \quad \forall \alpha \in \mathbb{Z}^n.$$

定理 2.8. (解の正則性)

$$\cdot f * u = 0, \quad u \in \mathcal{B}(M)^k \Rightarrow u \in \mathcal{Q}(M)^k$$

\Leftrightarrow (A.1) かつ (A.3) かつ

$$(A.4) \quad \overline{\lim}_{\substack{|\alpha| \rightarrow \infty \\ 1 \leq i \leq m_\alpha}} \frac{|\alpha| + |\text{Re } T_i(\alpha, \det f)|}{|\text{Im } T_i(\alpha, \det f)|} < \infty.$$

$$\cdot f * u \in \mathcal{Q}(M)^k, \quad u \in \mathcal{B}(M)^k \Rightarrow u \in \mathcal{Q}(M)^k$$

\Leftrightarrow (A.1) かつ (A.2) かつ (A.4).

例 2.9. $M = T^1 \times \mathbb{R}$ とする.

$\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial^k}{\partial x^k}$ に対して, 定理 2.8 の条件が成立するための必要十分条件は, どちらの場合も

$$\begin{cases} k \text{ が } 0 \text{ 以外の偶数の時} & c \notin \sqrt{-1} \mathbb{R} \\ k \text{ が奇数の時} & c \notin \mathbb{R} \end{cases}$$

また, $M = T^2 \times \mathbb{R}$ のとき, $\frac{\partial}{\partial t} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} - \frac{\partial^4}{\partial x_2^4}$ は, 定理 2.8 の条件を満たす.

以下, $f = \delta'(t) - g(x) \delta(t)$, $g(x) \in \text{Mat}(k, \mathcal{B}(T^n))$ を仮定する.

定理 2.10. (条件付解の一意性)

次の (1) ~ (3) のいずれかが成立すれば,

$$f * u = 0, \quad u \in \mathcal{B}(M)^k \Rightarrow u = 0$$

- (1) u が $\pi^{-1}(0)$ のある近傍で零.
- (2) u の $\pi^{-1}(0)$ への制限が存在して, $u|_{\pi^{-1}(0)} = 0$.
- (3) u の $\pi^{-1}(a)$ への trace が存在して, $u|_{\pi^{-1}(a)} = 0$.

問題 2.11. " $f * u = 0$ を満たす $u \in \mathcal{B}(M)^k$ は, M のある点の近傍で 0 なら, $u \equiv 0$ " となるための f の満たすべき必要十分条件は何か? たとえば, f が (A.10) (後述) を満たす時, 上の " " は成立するか?

定理 2.12. (制限の存在)

$f * u = 0, u \in \mathcal{B}(M)^k \Rightarrow u|_{\pi^{-1}(0)}$ が存在.

$$(A.5) \quad \overline{\lim}_{\substack{|\alpha| \rightarrow \infty \\ 1 \leq i \leq k}} \frac{|\operatorname{Re} T_i(\alpha, \det f)|}{|\alpha| + |\operatorname{Im} T_i(\alpha, \det f)|} < \infty.$$

定理 2.13. (trace の存在)

$f * u = 0, u \in \mathcal{B}(M)^k \Rightarrow u|_{\pi^{-1}(a)}$ が存在.

(A.5) から

$$(A.6) \quad \overline{\lim}_{\substack{|\alpha| \rightarrow \infty \\ 1 \leq i \leq k}} \frac{\operatorname{Im} T_i(\alpha, \det f)}{|\alpha|} < \infty.$$

系 2.14. (両側 \wedge の trace の存在)

$f * u = 0, u \in \mathcal{B}(M)^k \Rightarrow u|_{\pi^{-1}(a)}, u|_{\pi^{-1}(b)}$ が存在

$$(A.7) \quad \overline{\lim}_{\substack{|\alpha| \rightarrow \infty \\ 1 \leq i \leq k}} \frac{|T_i(\alpha, \det f)|}{|\alpha|} < \infty.$$

定理 2.15. (初期値問題)

" $\forall g \in \mathcal{B}(T^n)^k, \exists u \in \mathcal{B}(M)^k$

\Leftrightarrow s.t. $f * u = 0, u|_{\pi^{-1}(a)} = g$ "

$$(A.8) \quad \overline{\lim}_{\substack{|\alpha| \rightarrow \infty \\ 1 \leq i \leq k}} \frac{\operatorname{Im} T_i(\alpha, \det f)}{|\alpha| + |\operatorname{Re}(\alpha, \det f)|} \leq 0.$$

系 2.16. $\{u \in \mathcal{B}(M)^k; f * u = 0\}$ から $\mathcal{B}(T^n)^k \wedge$ の写像 $u|_{\pi^{-1}(a)}$ (又は, $u|_{\pi^{-1}(0)}$) が well-defined である \Rightarrow bijective.

⇔

$$(A.9) \quad \overline{\lim}_{\substack{|\alpha| \rightarrow \infty \\ 1 \leq i \leq k}} \frac{|\operatorname{Re} T_i(\alpha, \det f)|}{|\alpha|} < \infty, \quad \lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{Im} T_i(\alpha, \det f)}{|\alpha|} = 0.$$

このとき, f^* を *wave-type* とよぶ.

f^* が定理 2.8 の条件と, 定理 2.15 の条件とを満たす時.
(すなわち, (A.4) と (A.8)), f^* は t の正の方向に
heat type であるとよぶ.

f^* が次の条件を満たす時, *shrodinger type* とよぶ.

$$(A.10) \quad \lim_{\substack{|\alpha| \rightarrow \infty \\ 1 \leq i \leq k}} \frac{|\alpha| + |\operatorname{Im} T_i(\alpha, \det f)|}{|\operatorname{Re} T_i(\alpha, \det f)|} = 0$$

おわり