数理解析研究所講究録
209巻 1974年 63-77

内部境界値問題

東工大 理　平良和昭

§0. はじめに

次の $\mathbb{R}^2$（変数 x, y）における例は教訓的である：

<u>例</u>（cf. Kannai [6]）k を正の奇数とする。このとき

1) $P = D_y + i\, y^k D_x^2$ は Locally Solvable（以下 L.S. と略記）ではない。Hypo-Elliptic（以下 H.E. と略記）ではある。

2) $P^* = D_y - i\, y^k D_x^2$ は H.E. ではない。L.S. ではある。

（注意）P は "Hyperfunction" では解ける（三輪 [7]）。

ところで，何故 P（P^*）は L.S.（H.E.）でないのかその原因を少し考えてみよう。1) は次のようなよく知られた手順で示される。

<u>補題 0.1</u>（Hörmander [5], p. 157）微分方程式 $Pu = f$ が，任意の $f \in C_0^\infty(\Omega)$ に対して $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ なる解をもつとする。$\omega \subset\subset \Omega$ とする。このとき，${}^\exists C$, ${}^\exists \ell$, ${}^\exists N$ s.t.

$$\left| \int f v \, dx \right| \leqslant C \sum_{|\alpha| \leq l} \sup |D^\alpha f| \sum_{|\beta| \leq N} \sup |D^\beta P^* v|$$

for $\forall f, \ \forall v \in C_0^\infty(\omega)$.

そこで，次のことを示せばよい。

補題 0.2 (cf. Kannai [6]) $\exists \{f_\lambda\}, \exists \{v_\lambda\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ s.t.

イ) $\lim\limits_{\lambda \to \infty} \left| \int f_\lambda v_\lambda \, dx \right| = +\infty$,

ロ) $\overline{\lim\limits_{\lambda \to \infty}} \sum\limits_{|\alpha| \leq l} \sup |D^\alpha f_\lambda| < \infty$ for $\forall l$,

ハ) $\overline{\lim\limits_{\lambda \to \infty}} \sum\limits_{|\beta| \leq N} \sup |D^\beta P^* v_\lambda| < \infty$ for $\forall N$.

ところが，$\{v_\lambda\}$ は $P^* v = 0$ なる $v(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} e^{-\frac{y^{1+k}}{1+k}\xi^2} d\xi$ から，$\{f_\lambda\}$ は $\int \hat{F}(1, y) e^{-\frac{y^{1+k}}{1+k}} dy \neq 0$ なる $F \in C_0^\infty(\Omega)$ から，それぞれ構成される。このことは，x−方向に Fourier 変換したとき，$Pu = f$ ならば f は $P^* v = 0$ なる v と(適当な意味で)直交しなければならないということを示唆している。

2)の方は，l を適当な正の整数として

$$v(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} \frac{1}{(1+\xi^2)^l} e^{-\frac{y^{1+k}}{1+k}\xi^2} d\xi$$

とおけば，$P^* v = 0$ で

$$v(x, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} \frac{1}{(1+\xi^2)^l} d\xi \notin C_x^\infty$$

から従う。これは，$P^* v = 0$ を x−方向に Fourier 変換したとき $e^{-\frac{y^{1+k}}{1+k}\xi^2}$ という解をもったことに起因している。

以上のような考察から，1)の場合は直交するように射影する作用素(ポテンシャル型作用素) H をつけ加えてやり，2)

の場合は $v(x,0)$ の特異性の情報を与える条件($y=0$ での内部境界条件) γ_0 をつけ加えてやればよいことがわかる。故に

<u>予想</u>(<u>系2.2</u>をみよ)　1) (P, H) は L.S. である。H.E. でもある。2) $\begin{pmatrix} P^* \\ \gamma_0 \end{pmatrix}$ は H.E. である。L.S. でもある。

こういう (P, H), $\begin{pmatrix} P^* \\ \gamma_0 \end{pmatrix}$ を，われわれは"内部境界値問題"と呼ぶことにしよう(cf. Sjöstrand [9])。ところが，こういう問題については，最近，Egorov-Kondoratev [1],[2], Eškin [3], Grušin [4], Sjöstrand [8],[9], Višik-Grušin [15],[16],[17],[18] 等により大変よく研究されてきたが，ついに，Sjöstrand [10],[11],[12] が今までの結果の一般化に成功した。適当な正準変換によって今までの結果に如何に帰着するかが肝心な点である。

そういうわけで，以下の話は本質的に [12] に含まれてしまう。しかしながら，報告者が [13],[14] でのべたことの細かい計算の部分の証明(の方針)にあたるのでのべてみたい。

§1.　常微分作用素に対する解の構成

偏微分作用素 $P = \frac{\partial}{\partial y} - \alpha y^k p(D_x)$ を x-方向に Fourier 変換した常微分作用素 $L = \frac{d}{dy} - \alpha y^k p(\xi)$ について調べよう。ここで，$(x, y) = (x_1, \cdots, x_{n-1}, y) \in R^n$, $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_{n-1}) \in R^{n-1}$,

$K \in \mathbb{Z}^+$, $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $p(\xi)$ については, $^\exists C_0>0$, $^\exists \ell \in \mathbb{Z}^+$
s.t. $C_0^{-1}|\xi|^\ell \le p(\xi) \le C_0|\xi|^\ell$.

例 1° Oblique 境界値問題 (cf. [13]) : $p(D_x)=\sqrt{-\Delta_x}$, $\ell=1$.

2° $D_y \pm i y^K D_x$: $p(\xi)=|\xi|$, $\ell=1$

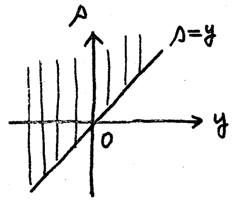
3° $D_y \pm i y^K D_x^2$: $p(\xi)=|\xi|^2$, $\ell=2$

(1°の場合は, L は擬微分作用素である。)

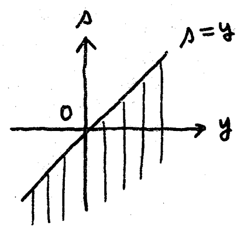
まず, $^\forall y\in\mathbb{R}$, $\xi\neq 0$ のときの L の Range を調べよう。

補題1.1 [I] $K=\text{even}$, $\alpha\neq 0$: $\alpha \gtrless 0$ に応じて $K_1^\pm(y,s)$ を次のように定義する。

$$K_1^+(y,s)=\begin{cases}-\exp\left[\frac{\alpha p(\xi)}{K+1}\left(y^{K+1}-s^{K+1}\right)\right] & s\ge y\\ 0 & s<y\end{cases}$$

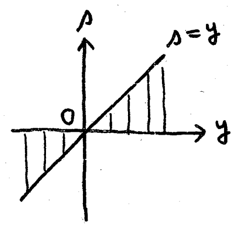


$$K_1^-(y,s)=\begin{cases}0 & s>y\\ \exp\left[\frac{\alpha p(\xi)}{K+1}\left(y^{K+1}-s^{K+1}\right)\right] & s\le y\end{cases}$$



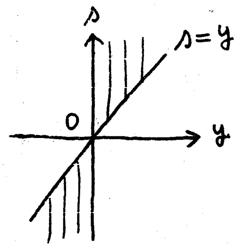
[II] $K=\text{odd}$, $\alpha<0$: $K_2(y,s)$ を次のように定義する。

$$K_2(y,s)=\begin{cases}\exp\left[\frac{\alpha p(\xi)}{K+1}\left(y^{K+1}-s^{K+1}\right)\right] & 0\le s\le y\\ \exp\left[\frac{\alpha p(\xi)}{K+1}\left(y^{K+1}-s^{K+1}\right)\right] & y\le s\le 0\\ 0 & \text{その他}\end{cases}$$



[III] $K=\text{odd}$, $\alpha>0$: $K_3(y,s)$ を次のように定義する。

$$K_3(y,s)=\begin{cases} -\exp\left[\frac{\alpha p(\xi)}{k+1}\left(y^{k+1}-s^{k+1}\right)\right] & 0\leq y\leq s \\ \exp\left[\frac{\alpha p(\xi)}{k+1}\left(y^{k+1}-s^{k+1}\right)\right] & s\leq y\leq 0 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$



このとき，$K_i(y,s)$ $(i=1,2,3)$ に対して

i) $\int |K_i(y,s)|\,dy = O\left(p(\xi)^{-\frac{1}{k+1}}\right)$,

$\int |K_i(y,s)|\,ds = O\left(p(\xi)^{-\frac{1}{k+1}}\right)$.

ii) $\int |K_i(y,s)|\,|y|^k\,dy = O\left(p(\xi)^{-1}\right)$,

$\int |K_i(y,s)|\,|y|^k\,ds = O\left(p(\xi)^{-1}\right)$.

規約　以下，分類番号 [I], [II], [III] は全て補題1.1と同じである。

函数空間　$\mathbb{R}$ 上の s 次の Sobolev 空間を $H^s(\mathbb{R})$, Norm を $\|\ \|_s$ とかく。さらに，次の函数空間を導入しよう。

$$H^{p(\xi)}_{(1.k)}(\mathbb{R}) \overset{\text{def.}}{=} \left\{ u\in H^1(\mathbb{R}) : \|u\|^{p(\xi)}_{(1.k)} < \infty \right\};$$

但し，
$$\|u\|^{p(\xi)}_{(1.k)} = \left[\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+p(\xi)^{\frac{1}{k+1}}+p(\xi)|y|^k\right)^2|u(y)|^2dy+\int_{-\infty}^{\infty}|D_y u(y)|^2dy\right]^{1/2}$$

このとき

補題1.2　$K(y,s)$ は $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 上の可測函数で，ある $C>0$ なる定数が存在して，

$$\int |K(y,s)|\,dy \leq C, \quad \int |K(y,s)|\,ds \leq C$$

とする。このとき，$f \in H^0(\mathbb{R}) = L^2(\mathbb{R})$ に対して，

$$Kf(y) = \int K(y,s) f(s)\,ds$$

と定義すれば，$Kf \in H^0(\mathbb{R})$ で

$$\|Kf\|_0 \leq C\|f\|_0.$$

に注意すれば，<u>補題1.1</u> から

<u>補題1.3</u>　$K_i(y,s)$ $(i=1,2,3)$ は<u>補題1.1</u>と同じとする。

[I]　任意の $f \in H^0(\mathbb{R})$ に対して

$$u^{\pm}(y) = K_1^{\pm} f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} K_1^{\pm}(y,s) f(s)\,ds$$

と定義すれば，$u^{\pm} \in H_{(1,k)}^{p(\xi)}(\mathbb{R})$ で

$$\begin{cases} Lu^{\pm} = f, \\ \|u^{\pm}\|_{(1,k)}^{p(\xi)} \leq C\|f\|_0. \end{cases}$$

ここで，C は $\xi \neq 0$ によらない正の定数である（以下同じ）。

[II]　任意の $f \in H^0(\mathbb{R})$ に対して

$$u(y) = K_2 f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} K_2(y,s) f(s)\,ds$$

と定義すれば，$u \in H_{(1,k)}^{p(\xi)}(\mathbb{R})$ で

$$\begin{cases} Lu = f, \\ \|u\|_{(1,k)}^{p(\xi)} \leq C\|f\|_0. \end{cases}$$

[III]　$L^*\psi = \left(\frac{d}{dy} + \alpha p(\xi) y^k\right)\psi = 0$ の解 $\psi(y) = \exp\left[\frac{\alpha p(\xi)}{1+k} y^{1+k}\right]$

と直交する $f \in H^0(\mathbb{R})$, i.e., $\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\psi(s)\,ds = 0$ なる f に

対して

$$u(y) = K_3 f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} K_3(y, s)\, f(s)\, ds$$

と定義すれば，$u \in H^{P(3)}_{(1.k)}(\mathbb{R})$ で

$$\begin{cases} Lu = f, \\ \|u\|^{P(3)}_{(1.k)} \leq C\|f\|_0. \end{cases}$$

（注意） Eskin [3] 流に解釈すれば，$K_i(y, s)$ $(i=1.2.3)$ の定義域は初期値問題：$LE=0$，$E|_{y=s}=I$（恒等写像），が（前向き，後向きのうち）Well-posed の方を選んでいることに対応している。

次に，$\forall y \in \mathbb{R}$，$\zeta \neq 0$ のときの L の Kernel を調べよう。

<u>補題1.4</u>　$Lu=0$，$u \in H^0(\mathbb{R})$ ならば，

[I]　$u \equiv 0$；

[II]　$u(y) = h \exp\left[\frac{\alpha P(3)}{1+k} y^{1+k}\right]$　$(h \in \mathbb{C})$；

[III]　$u \equiv 0$．

従って，<u>補題1.3</u> と <u>補題1.4</u> から

<u>命題1.5</u>　$L: H^{P(3)}_{(1.k)}(\mathbb{R}) \longrightarrow H^0(\mathbb{R})$ の Kernel, Range をそれぞれ $N(L)$, $R(L)$ で表わすと

[I]　$\dim N(L) = 0$，$\operatorname{codim} R(L) = 0$；

[II]　$\dim N(L) = 1$，$\operatorname{codim} R(L) = 0$，　$N(L)$ のベースは $\varphi(y) = \exp\left[\frac{\alpha P(3)}{1+k} y^{1+k}\right]$；

[III]　$\dim N(L) = 0$，$\operatorname{codim} R(L) = 1$，　$R(L)$ の直交えは $\psi(y) = \exp\left[-\frac{\alpha P(3)}{1+k} y^{1+k}\right]$．

より詳しく定理の形にまとめよう。

定理1.6 以下，C は ξ と h によらない正の定数である。

[I] 任意の $f \in H^0(\mathbb{R})$ に対して，$Lu^{\pm} = f$，$u^{\pm} \in H^{P(\xi)}_{(1,k)}(\mathbb{R})$ の解は一意的であって

$$u^{\pm}(y) = K_1^{\pm} f(y)$$

で与えられ，次の評価式が成立する：

$$\|u^{\pm}\|^{P(\xi)}_{(1,k)} \leq C \|f\|_0 .$$

[II] 任意の $f \in H^0(\mathbb{R})$，$h \in \mathbb{C}$ に対して，$Lu = f$，$u(0) = h$ の解 $u \in H^{P(\xi)}_{(1,k)}(\mathbb{R})$ は一意的であって

$$u(y) = K_2 f(y) + h\,\varphi(y)$$

で与えられ，次の評価式が成立する：

$$\|u\|^{P(\xi)}_{(1,k)} \leq C \left(\|f\|_0 + P(\xi)^{\frac{1/2}{1+k}} |h| \right),$$

ここで，$\varphi(y) = \exp\left[\frac{\alpha P(\xi)}{1+k} y^{1+k}\right]$.

[III] 任意の $f \in H^0(\mathbb{R})$ に対して，$Lu + \psi w = f$ の解 $u \in H^{P(\xi)}_{(1,k)}(\mathbb{R})$，$w \in \mathbb{C}$ は一意的であって

$$\begin{cases} u(y) = K_3 \left[f - \dfrac{(f, \psi)_0}{\|\psi\|_0^2} \psi \right](y) \\ w = \dfrac{(f, \psi)_0}{\|\psi\|_0^2} \end{cases}$$

で与えられ，次の評価式が成立する：

$$\|u\|^{P(\xi)}_{(1,k)} + P(\xi)^{-\frac{1/2}{1+k}} |w| \leq C \|f\|_0 ,$$

ここで，$\psi(y) = \exp\left[-\frac{\alpha P(\xi)}{1+k} y^{1+k}\right]$.

さて，$\forall y \in \mathbb{R}$，$\xi \neq 0$ の場合の定理1.6を使って，y 十分小，$\forall \xi \in \mathbb{R}^{n-1}$ の場合の結果を導こう。次節ではこちらの方が重要である。そこで，任意の $\varepsilon > 0$ に対して $B_\varepsilon = (-\varepsilon, \varepsilon)$ とおき，$H^1_0(B_\varepsilon) = C_0^\infty(B_\varepsilon)$ の $H^1(B_\varepsilon)$ での閉包，とする。さらに，次の記号を導入する。

$$u^0 = \begin{cases} u & B_\varepsilon, \\ 0 & B_\varepsilon \text{の外}. \end{cases}$$

このとき，定理1.6から

系1.7　以下，C は $\forall \xi \in \mathbb{R}^{n-1}$ によらない正の定数である.

[I]　任意の $f \in H^0(B_\varepsilon)$ に対して

$$R^\pm f = K_1^\pm (f^0)$$

と定義すれば，$R^\pm f \in H^1(B_\varepsilon)$ で

$$\begin{cases} LR^\pm f = f, \\ \|R^\pm f\|_{(1,k)}^{\rho(\xi)} \leq C \|f\|_0. \end{cases}$$

さらに

$$R^\pm L u = u \quad \text{for } \forall u \in H^1_0(B_\varepsilon).$$

[II]　任意の $f \in H^0(B_\varepsilon)$，$h \in \mathbb{C}$ に対して

$$R\begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix} = K_2(f^0) + h\,\varphi(y)$$

と定義すれば，$R\begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix} \in H^1(B_\varepsilon)$ で

$$\begin{cases} L R\begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix} = f \quad ; \quad R\begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix}(0) = h, \\ \left\|R\begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix}\right\|_{(1,k)}^{\rho(\xi)} \leq C\left(\|f\|_0 + (1+\rho(\xi))^{\frac{1/2}{1+k}} |h|\right). \end{cases}$$

さらに

$$R\begin{pmatrix} Lu \\ u(0) \end{pmatrix} = u \quad \text{for} \quad \forall\, u \in H^1(B_\varepsilon).$$

[III] 任意の $f \in H^0(B_\varepsilon)$ に対して

$$\begin{cases} R_1 f = K_3\left[f^0 - \dfrac{(f^0, \psi^0)_0}{\|\psi^0\|_0^2}\psi^0 \right], \\ R_2 f = \dfrac{(f^0, \psi^0)_0}{\|\psi^0\|_0^2}, \end{cases}$$

と定義すれば, $R_1 f \in H^1(B_\varepsilon)$, $R_2 f \in \mathbb{C}$ で

$$\begin{cases} L R_1 f + \psi R_2 f = f, \\ \|R_1 f\|_{(1,K)}^{p(\xi)} + (1+p(\xi))^{-\frac{1/2}{1+K}} |R_2 f| \le C \|f\|_0 . \end{cases}$$

さらに, 任意の $u \in H_0^1(B_\varepsilon)$, $w \in \mathbb{C}$ に対して

$$\begin{cases} R_1(Lu + \psi w) = u \\ R_2(Lu + \psi w) = w \end{cases}$$

§2. 内部境界値問題

さて, §1 の結果, 特に, 系1.7 を使って, $P = \frac{\partial}{\partial y} - \alpha y^K p(D_x)$ に対する内部境界値問題を考えよう。 $V_\varepsilon = \mathbb{R}^{n-1} \times B_\varepsilon$ とおく。

<u>函数空間</u> 1° $H_{(1,s,K)}(V_\varepsilon) = \{ u : \|u\|_{(1,s,K)} < \infty \}$

但し,

$$\|u\|_{(1,s,K)} = \Big\{ \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Big[\int_{B_\varepsilon} (1 + p(\xi)^{\frac{1}{1+K}} + p(\xi)|y|^K)^2 |\tilde{u}(\xi, y)|^2 dy \Big] (1+|\xi|^2)^s d\xi$$
$$+ \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Big[\int_{B_\varepsilon} |D_y \tilde{u}(\xi, y)|^2 dy \Big] (1+|\xi|^2)^s d\xi \Big\}^{1/2}.$$

2° $\overset{\circ}{H}_{(1.s.k)}(V_\varepsilon) = \{ u \in H_{(1.s.k)}(V_\varepsilon) : \hat{u}(\xi, \ ) \in H_0^1(B_\varepsilon) \}$.

3° $H_{(0,s)}(V_\varepsilon) = \{ u : \|u\|_{(0,s)} < \infty \}$ 但し,

$$\|u\|_{(0.s)} = \left\{ \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left[\int_{B_\varepsilon} |\hat{u}(\xi, y)|^2 dy \right] (1+|\xi|^2)^s d\xi \right\}^{1/2}.$$

4° $H_{(s,t)}(\mathbb{R}^{n-1}) = \{ v : |v|_{(s,t)} < \infty \}$ 但し,

$$|v|_{(s,t)} = \left\{ \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1+p(\xi))^{2t} (1+|\xi|)^{2s} |\hat{v}(\xi)|^2 d\xi \right\}^{1/2}.$$

(注意) イ) $P = \frac{\partial}{\partial y} - \alpha y^k p(D_x) : H_{(1.s.k)}(V_\varepsilon) \longrightarrow H_{(0.s)}(V_\varepsilon)$ は連続である。

ロ) $\gamma_0 u(x) = u(x, 0)$ ($y=0$ へのトレース) と定義すると $\gamma_0 : H_{(1.s.k)}(V_\varepsilon) \longrightarrow H_{(s, \frac{1/2}{1+k})}(\mathbb{R}^{n-1})$ は連続である。

ハ) $\widehat{Hw}(\xi, y) = \hat{w}(\xi) \exp\left[-\frac{\alpha p(\xi)}{1+k} y^{1+k}\right]$ (ポテンシャル型作用素) と定義すると $H : H_{(s, -\frac{1/2}{1+k})}(\mathbb{R}^{n-1}) \longrightarrow H_{(0.s)}(V_\varepsilon)$ は連続である。(もちろん, 今の場合は[III]の場合, 即ち, $k=$ odd, $\alpha > 0$ である。)

以上の準備のもとに, 系1.7 から

定理2.1 以下, C は $\forall s \in \mathbb{R}$ によらない正の定数である。

[I] 任意の $f \in H_{(0.s)}(V_\varepsilon)$ に対して

$$\widehat{E^\pm f}(\xi, y) = R^\pm \hat{f}(\xi, y)$$

と定義すれば, $E^\pm f \in H_{(1.s.k)}(V_\varepsilon)$ で

$$\begin{cases} P E^{\pm} f = f \\ \| E^{\pm} f \|_{(1,s,k)} \leq C \| f \|_{(0,s)} \end{cases}$$

さらに

$$E^{\pm} P u = u \quad \text{for } \forall u \in \mathring{H}_{(1,s,k)}(V_\varepsilon).$$

[II] 任意の $f \in H_{(0,s)}(V_\varepsilon)$, $h \in H_{(s,\frac{1/2}{1+k})}(\mathbb{R}^{n-1})$ に対して

$$\widehat{E\begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix}}(\xi, y) = R \begin{pmatrix} \hat{f}(\xi, y) \\ \hat{h}(\xi) \end{pmatrix}$$

と定義すれば, $E\begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix} \in H_{(1,s,k)}(V_\varepsilon)$ で

$$\begin{cases} P E\begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix} = f \ ; \ \gamma_0 E\begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix} = h, \\ \left\| E\begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix} \right\|_{(1,s,k)} \leq C \left(\| f \|_{(0,s)} + | h |_{(s,\frac{1/2}{1+k})} \right). \end{cases}$$

さらに

$$E\begin{pmatrix} P u \\ \gamma_0 u \end{pmatrix} = u \quad \text{for } \forall u \in H_{(1,s,k)}(V_\varepsilon).$$

[III] 任意の $f \in H_{(0,s)}(V_\varepsilon)$ に対して,

$$\begin{cases} \widehat{E_1 f}(\xi, y) = R_1 \hat{f}(\xi, y) \\ \widehat{E_2 f}(\xi, y) = R_2 \hat{f}(\xi, y) \end{cases}$$

と定義すれば, $E_1 f \in H_{(1,s,k)}(V_\varepsilon)$, $E_2 f \in H_{(s,-\frac{1/2}{1+k})}(\mathbb{R}^{n-1})$ で

$$\begin{cases} P E_1 f + H E_2 f = f \\ \| E_1 f \|_{(1,s,k)} + | E_2 f |_{(s,-\frac{1/2}{1+k})} \leq C \| f \|_{(0,s)}. \end{cases}$$

される

$$\begin{cases} E_1 (Pu + Hw) = u , \\ E_2 (Pu + Hw) = w \end{cases}$$

for $\forall\ u \in \mathring{H}_{(1,s,k)}(V_\varepsilon)$, $\forall w \in H_{(s,-\frac{k}{1+k})}(\mathbb{R}^{n-1})$.

従って，

系 2.2　$P = D_y + i y^k D_x^2$, $P^* = D_y - i y^k D_x^2$ とする。

[I] $k =$ even :　P も P^* も，L.S. であり H.E. である。

[II] $k =$ odd :　P^* は L.S. であるが H.E. ではない。

しかし，$\begin{pmatrix} P^* \\ \gamma_0 \end{pmatrix}$ は，L.S. で H.E. である。

[III] $k =$ odd :　P は H.E. であるが L.S. ではない。

しかし，(P, H) は，L.S. で H.E. である。

（注意）[III] で $\widehat{F^+ u}(\xi, y) = \hat{u}(\xi, 0)\, e^{-\frac{\xi^2}{1+k} y^{1+k}}$ と定義すれば，H.E. については F^+ と γ_0 は同じ役目を果たす。実際，$F^+ u \in C^\infty \Leftrightarrow \gamma_0 u \in C^\infty$ だから。普通は，γ_0 よりも F^+ の方を使う（cf. [8], [9], [11], [12]）。

文　　献

[1] Egorov and Kondoratev, A problem with an oblique derivative, Soviet Math. Dokl., 7 (1966), 1271 - 1273.

[2] ——————, The oblique derivative problem, Math. USSR Sbornik, 7 (1969), 139–169.

[3] Eškin, Degenerating elliptic pseudodifferential equations of principal type, Math. USSR Sbornik, 11 (1970), 539–582.

[4] Grušin, On a class of elliptic pseudodifferential operators degenerate on a submanifold, Math. USSR Sbornik, 13 (1971), 155–185.

[5] Hörmander, Linear partial differential operators, Springer, Berlin, 1963.

[6] Kannai, An unsolvable hypoelliptic differential operator, Israel J. of Math., 9 (1971), 306–315.

[7] 三輪，代数解析セミナー，6月2日，1973年.

[8] Sjöstrand, Sur une classe d'operateurs pseudo-differentiels de type principal, C. R. Acad. Sci. Paris, 271 (1970), 781–783.

[9] ———, Operators of principal type with interior boundary conditions, Acta Math., 130 (1973), 1–51.

[10] ———, Une classe d'operateurs pseudo-differentiels à caracteristiques multiples, C. R. Acad. Sci. Paris, 275 (1972), 817–819.

[11] ——————, *Une classe d'operateurs pseudo-differentiels à caracteristiques doubles*, C. R. Acad. Sci. Paris, 276 (1973), 743-745

[12] ——————, *Parametrices for pseudodifferential operators with multiple characteristics*, to appear in Arkiv för Math.

[13] 平 良，函数解析的方法による偏微分方程式の研究。

[14] ———，超函数と線型微分方程式 I.

[15] Višik and Grušin, *On a class of higher order degenerate elliptic equations*, Math. USSR Sbornik, 8 (1969), 1-32.

[16] ——————————, *Boundary value problems for elliptic equations degenerate on the boundary of a domain*, Math. USSR Sbornik, 9 (1969), 423-454.

[17] ——————————, *Elliptic pseudodifferential operators on a closed manifold which degenerate on a submanifold*, Soviet Math. Dokl., 10 (1969), 1316-1320.

[18] ——————————, *Elliptic boundary value problems degenerating on a submanifold of the boundary*, Soviet Math. Dokl., 11 (1970), 60-64.