京都大学学術情報リポジトリ
KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

京都大学 KYOTO UNIVERSITY

Title	楕円型方程式系の境界値問題 (超函数と線型微分方程式II)
Author(s)	柏原, 正樹; 河合, 隆裕
Citation	数理解析研究所講究録 (1974), 209: 26-34
Issue Date	1974-05
URL	http://hdl.handle.net/2433/105193
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

Kyoto University

数理解析研究所講究録
209巻 1974年 26-34

楕円型方程式系の境界値問題

柏原正樹・河合隆裕
(京大・数理研)

"境界値問題"は，現在の所，"代数解析的に"問題を大域化できる殆んど唯一の道具と思われる。より一般の場合の定式化については柏原-河合[1]，[2]を参照して頂くとして，ここでは線型楕円型微分方程式系 $\mathcal{M}$ に対する境界値問題を境界の余次元が1の場合に限って簡単に説明したい。$\mathcal{M}$ が楕円型でない時はどのような定式化をすればよいのか我々は未だその解答を知らない。尚，更に詳しい議論は柏原-河合[1]，[2]及び，数年内に執筆予定の書に譲りたい。

まず記号の準備から始める。

M を実解析的多様体，N をその余次元1の部分多様体，X，Y をそれぞれ M，N の複素近傍とする。問題は局所的に考えることとし，$M=M_+\sqcup M_-\sqcup N$ と分け，ϑ にて M_+ の側を示す余ベクトルとする。更に $Z_\pm = M_\pm \sqcup N$ と定める。この時この分割に応じて $S_N^*X = G_+\sqcup G_-\sqcup iS^*M \underset{M}{\times} N$，但し

$$G_\pm = \{(x, \zeta\infty) \in S^*_N X ;\ \mathrm{Re}\,\zeta = \pm\vartheta\}$$

という $S^*_N X$ の分割が出来る。 今 $\mathcal{M}$ を M で定義された楕円型微分方程式系とする。(以下"線型"は略する。) この時 $S.S.\,\mathcal{M} \cap iS^*M \underset{M}{\times} N = \phi$ が楕円型の仮定より従う(同値)ことを注意しておこう。

以下記号その他は 佐藤-河合-柏原 [1] (S-K-K と略する)に従う。

今 ρ によって $S^*_N X - S^*_Y X$ から $S^*_N Y$ への自然な射影を表わすこととして,

$$\mathcal{N}_\pm = \rho_*\left(\mathcal{D}_{Y\to X} \underset{\pi^{-1}\mathcal{D}_X}{\otimes} \mathcal{M}|_{G_\pm}\right)$$

と"正(負)の特性多様体に付随した"接(擬微分)方程式系を定義する。 明らかに, $\mathcal{N}_+ \oplus \mathcal{N}_- = \mathcal{M}_Y$ が $S.S.\,\mathcal{M} \cap iS^*M \underset{M}{\times} N = \phi$ 故, 成立する。

以上の準備の後に定理は次の形で与えられる。

<u>定理.</u> $$\mathbb{R}\Gamma_{Z_\pm}\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_M}(\mathcal{M};\mathcal{B}_M)$$

$$\cong \mathbb{R}\pi_{N*}\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{P}_N}(\mathcal{N}_\pm;\mathcal{C}_N)[-1]$$

勿論ここで通常通り $\mathcal{B}_M$ は M 上の超函数の層,

C_N は $S^*_N Y \cong iS^*N$ 上のマイクロファンクションの層，
π_N は iS^*N から N への射影を表わす。

定理の証明は補助的な層 $C_{N/X}$ を導入して2段階に分けて行う。第一段階では $\mathcal{M}$ の楕円性が，第二段階では N が $\mathcal{M}$ に関して非特性的であること（これは N の余次元が1より大きい時は $\mathcal{M}$ の楕円性とは無縁の事である。今の場合は N の余次元1故，陽に仮定しなかった。）が本質的である。

まず"相対C" $C_{N/X}$ は

$$\mathcal{H}^n_{S^*_N X}(\pi_{N/X}^{-1}\mathcal{O}_X)^a$$

によって定義された。

この時，この定義より容易に従う次の2つの事実に注意しよう。特に補題1は何故境界値問題において $G_\pm$ が，従って $\mathcal{N}_\pm$ が，本質的かを説明していると言えよう。

<u>補題1.</u> $\mathbb{R}\Gamma_{Z_\pm}(\mathcal{B}_M) \to \pi_{N/X *}(C_{N/X}|G_\pm)$

なる写像が存在する。
(S-K-K Chap. 1. Prop. 1.2.4 参照)

補題2. 次の完全系列が存在する。

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{O}_X|_N \arrow[dl] & \\
\mathcal{H}^n_N(\mathcal{O}_X)[1] \arrow[rr] & & \mathbb{R}\pi_{N/X*}\mathcal{C}_{N/X}[1] \arrow[ul, "+1"']
\end{tikzcd}
$$

(S-K-K Chap. 1. Prop. 1.2.5 参照)

今定理に言う同型の左辺を $\mathcal{C}_{N/X}$-解に関するコホモロジー群として表わそう。補題1により次の写像 $b_\pm$ が存在することは自明。

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{R}\Gamma_{Z_\pm}\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_M}(\mathcal{M};\mathcal{B}_M)\\
&\quad= \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_M}(\mathcal{M};\mathbb{R}\Gamma_{Z_\pm}(\mathcal{B}_M))\\
&\xrightarrow{b_1} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_M}(\mathcal{M};\mathbb{R}\pi_{N/X*}(\mathcal{C}_{N/X}|_{G_\pm}))\\
&\quad= \mathbb{R}\pi_{N/X*}(\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{P}_X}(\mathcal{P}_X\otimes_{\pi^{-1}\mathcal{D}_X}\mathcal{M},\ \mathcal{C}_{N/X})|_{G_\pm})
\end{aligned}
$$

この写像 b_1 が実は同型であることを言いたい。それには、$\mathcal{B}$ の脆弱性より従う、次頁可換図式（の上半分に現われる完全系列）に注意しよう。勿論その図式の下半分は補題2の系である。

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \mathbb{R}\Gamma_N \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_M}(\mathcal{M};\mathcal{B}_M) \arrow[dl] \arrow[dd, "i"] & \\
\mathbb{R}\Gamma_{Z_+}\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_M}(\mathcal{M};\mathcal{B}_M)\oplus\mathbb{R}\Gamma_{Z_-}\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_M}(\mathcal{M};\mathcal{B}_M) \arrow[rr] \arrow[ddd, "b_1"] & & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_M}(\mathcal{M};\mathcal{B}_M) \arrow[ul] \arrow[dddd, "j"] \\
 & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_M}(\mathcal{M};\mathcal{H}^n_N(\mathcal{O}_X)) \arrow[dl] & \\
 & & \\
\mathbb{R}\pi_{N/X*}\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{P}_X}(\mathcal{M};\mathcal{C}_{N/X})|_{G_+}\oplus\mathbb{R}\pi_{N/X*}\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{P}_X}(\mathcal{M};\mathcal{C}_{N/X})|_{G_-} \arrow[d, equal] & & \\
\mathbb{R}\pi_{N/X*}\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{P}_X}(\mathcal{M};\mathcal{C}_{N/X}) \arrow[d, equal] & & \\
\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{P}_X}(\mathcal{M},\mathbb{R}\pi_{N/X*}\mathcal{C}_{N/X}) \arrow[rr] & & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M};\mathcal{O}_X|_N) \arrow[uuuu, "+1"']
\end{tikzcd}
$$

ここで i は定義により, 又 j は $\mathcal{M}$ の楕円性より従う $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_M}(\mathcal{M};\mathcal{B}_M)=\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_M}(\mathcal{M},\mathcal{A}_M)$ なる同型により, いずれも同型である。従って 従って上に定義された準同型 b_1 も同型である。

次に 定理にいう同型の右辺と $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{P}_X}(\mathcal{M};\mathcal{C}_{N/X})|_{G_\pm}$ との関係を調べよう。

今 Nが, 従ってYが, $\mathcal{M}$に関して非特性的故,

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{P}_Y}(\mathcal{M}_Y;\mathcal{P}_Y) \longrightarrow \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{P}_X}(\mathcal{M},\mathcal{P}_{X\leftarrow Y})[1]$$

なる自然な準同型が存在する。(S-K-K p. 415 参照)

この準同型により, 次の準同型 b_2 を得ることが出来る。

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{P}_Y}(\mathcal{M}_Y;\mathcal{C}_N) \xrightarrow{b_2} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{P}_X}(\mathcal{M};\mathcal{C}_{N/X})[1]$$

実際,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{P}_Y}(\mathcal{M}_Y;\mathcal{C}_N)\\
&\longrightarrow \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{P}_Y}(\mathcal{M}_Y;\mathcal{P}_Y)\overset{L}{\underset{\mathcal{P}_Y}{\otimes}}\mathcal{C}_N\\
&\longrightarrow \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{P}_X}(\mathcal{M};\mathcal{P}_{X\leftarrow Y})\overset{L}{\underset{\mathcal{P}_Y}{\otimes}}\mathcal{C}_N[1]\\
&\longrightarrow \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{P}_X}(\mathcal{M};\mathcal{P}_{X\leftarrow Y}\overset{L}{\underset{\mathcal{P}_Y}{\otimes}}\mathcal{C}_N)[1]\\
&\longrightarrow \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{P}_X}(\mathcal{M};\mathcal{C}_{N/X})[1]
\end{aligned}$$

$\mathcal{M}_Y=\mathcal{N}_+\oplus\mathcal{N}_-$ に注意すれば, この準同型を用いて得られる

$$\mathbb{R}\pi_{N*}\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{P}_Y}(\mathcal{M}_Y;\mathcal{C}_N)\xrightarrow{b_2}\mathbb{R}\pi_{N/X*}\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{P}_X}(\mathcal{M};\mathcal{C}_{N/X})[1]$$

なる写像が同型であることを言えば，前半の所論と合わせて定理に言う同型が示されたことになる。しかるに，N が $\mathcal{M}$ に対して非特性的なことにより，Riemann-Hilbert-Plemeljl 型の境界値問題に対する同型（たとえば S-K-K (Chap. 2, Cor. 3.5.8 参照) により下の可換図式の b_3 は同型，又，同じく k も Cauchy-Kowalevsky の定理により同型。従って求める同型が得られる。

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{M}_Y; \mathcal{B}_N/\mathcal{A}_N) \arrow[dl, "+1"'] \arrow[dd, "b_2"] & \\
\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{M}_Y; \mathcal{A}_N) \arrow[rr] \arrow[dd, "k"'] & & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{M}_Y; \mathcal{B}_N) \arrow[ul] \arrow[dd, "b_3"] \\
 & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathbb{R}\pi_{N/X*}\mathcal{C}_{N/X})[1] \arrow[dl] & \\
\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}; \mathcal{O}_X|_N) \arrow[rr] & & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}; \mathcal{H}^n_N(\mathcal{O}_X)) \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

註　以上では $\mathcal{M}$ が楕円型であることを仮定したが、その仮定は少し弱め得る。実際 $\mathrm{Supp}\,\mathcal{M}\cap G_{\pm}$ の近傍 $U_{\pm}$ を $U_{+}\cap U_{-}=\phi$ なるようにとることが出来、しかも超函数の範囲で $\mathcal{M}$ に対し存在、正則性定理が成り立つなら（N が $\mathcal{M}$ に関して非特性的、という仮定の下に）定理が成立することは見易い。このような作用素の最も簡単な例は、所謂溝畑の作用素

$$\frac{\partial}{\partial x_1}+ix_1^{k}\frac{\partial}{\partial x_2} \qquad (N=\{x_1=0\}\subset M=\mathbb{R}^2,\ k:\text{偶数})$$

である。もっと豊富な例については柏原－河合 [3]（Micro-hyperbolic pseudo-differential operator I.）参照。但しこの論文では未だ単独の作用素しか扱われていない所に応用上問題が残っている。

文献（詳しくは下記の文献の文献表参照）

柏原-河合：[1] Proc. Japan Acad. 48 (1972) 712-715

———— ：[2] Proc. Japan Acad. 49 (1973) 164-168

———— ：[3] Submitted to J. Math Soc Japan.

佐藤-河合-柏原：[1] (S-K-K) Lecture Notes in Mathematics No. 287, Springer, Part II. pp. 265-529