数理解析研究所講究録
209巻 1974年 11-25

S行列のミクロ解析性について．I.

京大・数理研
佐藤幹夫

§0.

S行列の解析において macro-causality と呼ばれる台（あるいは減少度）あるいは（Fourier変換を経由してそれと同値な）解析性との関係は最近かなりよく調べられてきている。（たとえば Iagolnitzer [1], Iagolnitzer-Stapp [1], Bros-Iagolnitzer [1], Pham [1] 等）本講演では、Phamとの討論の結果、認識された解析性に関する定式化（"ミクロ解析性の仮説"）を§1で述べる。尚、この仮説は、Olive による $i\varepsilon$-則よりはるかに本質的なものである。（実際、中西[1]は反例により、Feynman積分の場合に $i\varepsilon$-則が満たされないことがあることを示したが、§2で述べるように、"ミクロ解析性の仮説"はFeynman積分に対しては常に成立する。）§2においては、Feynman積分に対しては、"ミクロ解析性の仮説"は成立し、更に強く、それを特徴付ける極大過剰擬微分方程式系（その概念については佐藤－河合－柏原[1]（S-K-Kと以下略記する）参照）を見出せることを示す。同じくPhamと講演者により提唱されている、S行列の合成に関する"スペクトルの仮説"及びS行列と擬微分方程式系の関係については

次稿に譲りたい。

§1. ミクロ解析性の仮説

粒子 i の質量を m_i とし，反応前の粒子の添数集合を I，反応後の粒子の添数集合を J とすれば，その反応を記述するS行列 S_{IJ} は mass shell $M_i=\{p=(p_{(0)},p_{(1)},p_{(2)},p_{(3)})\in\mathbb{R}^4_p;\ p^2-m_i^2=0,\ p_{(0)}>0\}$（ここに $p^2=p_{(0)}^2-p_{(1)}^2-p_{(2)}^2-p_{(3)}^2$）の直積 $\prod_{i\in I\cup J} M_i$ 上の超函数である。我々はこの超函数 S_{IJ} の特異性の構造を考察したい。（$m_i\neq 0$ としておく。）あるいは，mass shell 上での運動量保存則 $(\sum_I p_{i,(\nu)}-\sum p_{j,(\nu)})S_{IJ}=0$ を考慮して $S_{IJ}=\delta^4(\sum_I p_i-\sum_J p_j)S_{(IJ)}$ と δ 函数をくくり出して process (I,J) に関する散乱振幅 $S_{(IJ)}$ を考察してもよいが，$\sum p_{i,(\nu)}-\sum p_{j,(\nu)}=0$ $(\nu=0,1,2,3)$ で定められる variety が特異性を持つ時，δ 函数をくくり出すことは一般には出来ないので，むしろ S_{IJ} は微分方程式（実はこの場合は自明な代数方程式）

(1) $(\sum_I p_{i,(\nu)}-\sum_J p_{j,(\nu)})S_{IJ}=0$ $(\nu=0,1,2,3)$

を満たす，として以下の議論を進めよう。

更にこの立場を進めて，"mass shell 上の超函数 S_{IJ}"

という捉え方の代わりに、 $(\mathbb{R}^4)^{|I|+|J|}$ 上の超函数 $\tilde{S}_{IJ}$ を $S_{IJ} \prod_{i \in I \cup J} \delta(p_i^2 - m_i^2)$ によって定めて、 $\tilde{S}_{IJ}$ の満たす次の方程式 (0)を常に付加して考えてもよい。

(0) $(p_i^2 - m_i^2)\, \tilde{S}_{IJ} = 0 \qquad i \in I \cup J.$

この時 (1) は

(1') $\left(\sum_I p_{i,(\nu)} - \sum_J p_{j,(\nu)}\right) \tilde{S}_{IJ} = 0 \qquad (\nu = 0, 1, 2, 3)$

によりおきかえる。

さて、我々は、$\tilde{S}_{IJ}$ の特異性を、$\tilde{S}_{IJ}$ を microfunction (註1) p.6 参照。 として考察することにより、その余接成分迄合わせて考察する。ここで"余接ベクトル"は、運動量空間 $(\mathbb{R}^4_p)^{|I|+|J|}$ のそれであるから、space-time ベクトルとなる。又、通常は"函数の特異性の'高周波近似'を考える"という観点をとるが、これをこの場合に適すべく翻訳すれば"'十分遠く離れた状態'を考える"ということになり、macro-causality に対応した statement になる。microfunction の概念については S-K-K Chap. 1. を参照。

尚、§0 で我々は S行列を擬微分方程式系の観点から考察するのを最終目標とする、と言ったが、擬微分方程式が、S行列の特異性を如何に支配するかは次の定理により明らかにされる。(通常"佐藤の基本定理"と呼ばれる。)

定理 (S-K-K Chap. II. Th. 2.1.1) 今 u, f を多様体 M 上の microfunctions, $P(x, D)$ を擬微分作用素 とし, $Pu = f$ が満たされているなら

$$\mathrm{Supp}\, u \subset \{(x, \tfrac{1}{i}\eta\infty) \in iS^*M \,;\, p_m(x, \tfrac{1}{i}\eta) = 0\} \cup \mathrm{Supp}\, f$$

が成立する. ここに $p_m(x, \eta)$ は $P(x, D)$ の主要表象, $S^*M = T^*M - M/\mathbb{R}^+$ は M の余接球バンドル。(P 及び u, f は iS^*M 上局所的に定義される対象であることを注意しておく。)

この定理により, 大雑把に言えば, microfunction u が"独立な" d ケの擬微分方程式 $P_j(x, D)u = 0$ ($j = 1, \cdots, d$) を満たせば, u の台はは iS^*M 内の余次元 d の部分多様体に含まれてしまうことが判る。更に, この多様体は S^*M の接触多様体の構造と関係した特殊な性質 (involutory submanifold) を持っていることも知られている。そのような幾何学的性質がどのように擬微分方程式の解を支配するかを (generic には) 解明したのが S-K-K Chap. II 及び Chap. III である。

特に我々が今必要とするのは, そのような方程式系の内で最も"強い" (即ち d の大きい, 実際 それは高々 $\dim M$ で

あることが知られている）物，既ち極大過剰決定系である。極大過剰決定系の最も著しい特徴はそれの解空間が有限次元になってしまうことである。従って標語的には，

"極大過剰決定系" = "函数"

と言えよう。これが，我々がS行列の満たす極大過剰決定系に興味を持つ所以である。

さて，"ミクロ解析性の仮説"を述べる為に，$(p, \frac{1}{i}u) \in iS^*((\mathbb{R}^4_p)^{|I|+|J|})$ $(p = (p_i)_{i \in I \cup J},\ u = (u_i)_{i \in I \cup J})$ が（あるgraph G について）causal である，あるいは causal configuration である，という事実の定義を思い出しておこう。（たとえば Iagolnitzer [1] pp. 75-82 参照）

定義．$(p, \frac{1}{i}u) \in iS^*((\mathbb{R}^4_p)^{|I|+|J|})$ が（時空）net $\mathcal{N}$ に関して causal であるとは，L 個の向き付けられた線分 l からなる net $\mathcal{N}$ があって，各 l に対し実4-ベクトル k_l と非負数 α_l が次の Landau 方程式 (L.0)〜(L.2)を満たすように指定され得ることである。

(L-0)　$k_l^2 - m_l^2 = 0$，$k_{l,(0)} > 0$　$(l = 1, \cdots, L)$，

　　即ち $k_l \in M_l$

(L-1)　$\mathcal{N}$ の各頂点において運動量保存則が成立する。

(L-2) $\quad u_{f(l)} - u_{i(l)} = \alpha_l k_l \quad (l = 1, \cdots, L)$

但し，$u_{f(l)}$ は線分 l の終点の位置ベクトル，$u_{i(l)}$ は線分 l の始点の位置ベクトル。

(勿論，この他に自明な関係式，即ち2つ(以上)の粒子が衝突する際，それ等の位置ベクトルが相等，というのがあるが，これは $\alpha_l = 0$ として関係式を増せばよい。)

注意： α_l は Feynman parametrix；(Landau 方程式の下に $m_l \alpha_l = \tau_l$ とすれば，これは固有時間に相当する。)

以上の準備の下に"ミクロ解析性の仮説"は次のように述べられる。

◎ S.S. $\tilde{S}_{IJ}$ $(\subset i S^*((\mathbb{R}^4_p)^{|I|+|J|}))$ は causal な点の集合に含まれる。

ここに S.S. は (超函数 S_{IJ} を) microfunction とみての台の意。(i.e. singularity spectrum of $\tilde{S}_{IJ}$)

換言すれば，S行列の特異性は，古典的な process に対応している。

註1. Microfunction の理論に慣れてみえない方の為に，その基本的な性質について付言しておく。

Microfunction の層 $\mathcal{C}$ とは，(実解析的多様体 M が

与えられたとして）で iS^*M 上の層であり，次の性質を満たす。

$$0 \to \mathcal{A} \to \mathcal{B} \xrightarrow{sp.} \pi_* C \to 0$$

ここで $\mathcal{A}$ は M 上の実解析函数の層，$\mathcal{B}$ は M 上の超函数の層，π は $iS^*M \to M$ への自然な写像 (i.e. $(x, i\xi) \mapsto x$)，$\pi_* C$ は π による C の順像である。あるいは層 $\mathcal{A}$ がコホモロジカルには自明であることを用いれば，上の（層の）完全列は，次のように切断加群の完全列に書き直してもよい。

U を M の開集合として

$$0 \to \Gamma(U, \mathcal{A}) \to \Gamma(U, \mathcal{B}) \xrightarrow{sp.} \Gamma(U, \pi_* C) \to 0$$

ここで定義により

$$\Gamma(U, \pi_* C) = \Gamma(\pi^{-1}(U), C)$$

即ち，超函数の（$\mathcal{A}$を法としての）特異性は層 C によって iS^*M 上で詳述される。

§2. Feynman 積分に対する "ミクロ解析性の仮説" の験証

Graph G に付随した Feynman 積分 F_G の場合には、その形が具体的に知られているから、microfunction について の基本的事実（積分 etc. S-K-K (Chap. 1 参照) を用い て容易にそれが "ミクロ解析性の仮説" を満たすことを 示し得る。実際 中西 [2] の記号を用いて $F_G(p)$ は次の ように与えられる。

$$F_G(p) = \int \prod_{\substack{j \\ (\text{頂点})}} \delta\Big(p_j + \sum_{l} [j:l] k_l\Big) \prod_{\substack{l \\ (\text{内線})}} \Big(\frac{1}{k_l^2 - m_l^2 + i0} \, dk_l \Big)$$

ここに $[j:l]$ は G の内線 l と頂点 j の incidence number であって ± 1 又は 0.

ここで上の被積分函数の singularity spectrum は容易に調べることが出来て，それは次の集合 S に含まれる。

$$S = \Big\{ ((p_j), (k_l)) ; \tfrac{1}{i}((u_j), (v_l))\infty) ; \overbrace{((u_j), (v_l)) \text{ は各々}}^{(p_j), (k_l) \text{に対応する余接ベクトル成分}}$$

$$p_j + \sum [j:l] k_l = 0 \quad (\forall j), \quad \alpha_l (k_l^2 - m_l^2) = 0$$

$$v_l = \alpha_l k_l + \sum [j:l] u_j \quad (\forall l) \quad \alpha_l \geq 0 \Big\}$$

ここで助変数についての積分と singularity spectrum の関係（S-K-K Chap. 1. § 2.3 Th. 2.3.1）により，（$(p, t\,;\, i(u, v)\infty) \longrightarrow (p, u)$ なる写像が $S_1\{v=0\}$上固有，つまり，言える コンパクト集合の逆像はコンパクト，という仮定の下に）S. S. F_G は次の集合に含まれることが判る。

$$\{((p_j), \tfrac{1}{i}(u_j)\infty)\ ;\ {}^{\exists}t_l,\ {}^{\exists}\alpha_l(\geq 0) \text{ があって}$$

$$\sum_j [j\,;\,l]\, u_j + \alpha_l t_l = 0 \text{ が成立する，即ち}$$

$$(p, \tfrac{1}{i}u\infty) \text{ は causal な点である。}\}$$

これは明らかに F_G が"ミクロ解析性の仮説"を満たしていることを意味している。

註 2. この条件は ${}^{\forall}\alpha_l \neq 0$ なら自明に満たされる。以下考察をこの場合（leading case）に限定する。又 $\alpha_l = 0$ に対応する reduced graph が closed circuit を含まなければよい。一般には，renormalization により compact 化をまず行っておくべきであろう。

以上では，Feynman 積分の特異性を"超函数の積分と特異性"の観点より論じたが，実は p. 4 に触れた基本定理の観点から問題を論じることも可能であり，その方がより本質的である。（なぜなら，$P(x, D_x)u = 0$ なら $\mathrm{supp}\, u \subset \{p_m(x, i\eta) = 0\}$ は従うが，$\mathrm{supp}\, u \subset \{p_m = 0\}$ だけでは u が擬微

分方程式を満たすかどうかは全く判らない。）実際，我々は（擬）微分方程式を"函数"の統制原理と信じたいからである。実は，その議論もFeynman積分の場合は，擬微分方程式に関する基本的事実（S-K-K Chap 2. §3.5, Th. 3.5.5 等）を用いれば容易に行い得て，F_Gの満たす極大過剰決定系を容易に見出だせる。（勿論，そのような方程式系を見出だせば，p.4. の基本定理により S.S. F_Gは容易に決定できる。但し mass shell の内 $p_{(0)}>0$ の側にのみ特異性があることは擬微分方程式系の情報だけでは出てこない。実際 F_Gの代りに，その被積分函数を

$$\prod_j \delta(p_j+\Sigma[j:l]k_l)\prod_l\left(\frac{1}{k_l^2-m_l^2-i0}dk_l\right)$$

おきかえて得られる函数も同じ方程式系を満たし，その台は mass shell の内 $p_{(0)}<0$ の側に特異性を持っている。このような ambiguity（有限次元）を取り去るには方程式系以外の付加的な情報が要る。）

今 F_Gの被積分函数をΦ_Gとする。まず質量も変数と思って $\lambda_l=\frac{1}{2}m_l^2$ なる助変数を導入しよう。即ち $\Phi_G=\Phi_G(p,k,\lambda)$ と考える。又．$D_p=\left(\frac{\partial}{\partial p_{(0)}},-\frac{\partial}{\partial p_{(1)}},-\frac{\partial}{\partial p_{(2)}},-\frac{\partial}{\partial p_{(3)}}\right)$ とする。この時 Φ_Gは次の微分方程式系を満たすことは明らかである。

$$\begin{cases} (1) \quad (p_j + \sum_l [l;j]\, \hbar_l)\, \Phi_G = 0, \quad \forall j \\ (2) \quad (D_{\hbar_l} - \sum_j [l;j]\, D_{p_j} + \hbar_l D_{\lambda_l})\, \Phi_G = 0, \quad \forall l \\ (3) \quad ((\lambda_l - \frac{1}{2}\hbar_l^2) D_{\lambda_l} + 1)\, \Phi_G = 0 \end{cases}$$

さて、一般に $f(x) = \int \varphi(x,y)\,dy$ として $\varphi(x,y)$ が

(#) $Q_j(x, y, D_x, D_y)\varphi = 0 \quad (j = 1, \cdots, d)$

という(擬)微分方程式系を満たすならば、$P(x, D_x)$ は適当な $A_j(x, y, D_x, D_y)$, $B_k(x, y, D_x, D_y)$ により

$$\sum_j A_j(x, y, D_x, D_y) Q_j(x, y, D_x, D_y) + \sum D_{y_k} B_k(x, y, D_x, D_y)$$

の形に分解できる時

(b) $P(x, D_x) f(x) = 0$

なる方程式を満足する ことに注意しておこう。(これが S-K-K Chap. 2. Th. 3.5.5 の直観的意味である。)

今 leading case のみを考えることにすれば (2) の主要表象を考えて $D_{\lambda_l}^{-1}$ が存在することが判る。(p. 4. の基本定理は、実は、P の主要表象が $\neq 0$ ならば P は擬微分作用素として逆作用素を持つ、という形で元来証明され

3.) 今ここで $X_\ell = \sum_j [\ell ; j] D_{p_j}$ と定めれば

$$(2') \quad k_\ell \Phi_G = -(D_{k_\ell} - X_\ell) D_{\lambda_\ell}^{-1} \Phi_G$$

と(2)は書き換えられるから(1)と合わせて

$$(4) \quad \Big(p_j + \sum_\ell [\ell ; j] (X_\ell - D_{k_\ell}) D_{\lambda_\ell}^{-1}\Big) \Phi_G = 0 \quad (\forall j)$$

しかるに $F_G = \int \Phi_G \, dk$ であったから 上の (4) より (b) を得る手続により

$$(5) \quad \Big(p_j + \sum_\ell [\ell ; j] X_\ell D_{\lambda_\ell}^{-1}\Big) F_G = 0 \quad (\forall j)$$

なる関係式が得られる。

又, (2), (3) を合わせて

$$(6) \quad \Big((\lambda_\ell D_{\lambda_\ell} + 1) + \frac{1}{2} k_\ell (D_{k_\ell} - X_\ell)\Big) \Phi_G = 0$$

即ち, $N = \#$(内線)とすれば,

$$(6') \quad \Big((\lambda_\ell D_{\lambda_\ell} + 1) + \frac{1}{2} (D_{k_\ell} - X_\ell) k_\ell - \frac{N}{2}\Big) \Phi_G = 0$$

これに D_{λ_ℓ} を作用させて (2) を用いれば

$$(6'') \quad \Big(D_{\lambda_\ell} \lambda_\ell D_{\lambda_\ell} + \Big(1 - \frac{N}{2}\Big) D_{\lambda_\ell} - \frac{1}{2} (D_{k_\ell} - X_\ell)^2\Big) \Phi_G = 0$$

従って (4) より (5) を得たと同じ理由で

$$(7) \quad \Big(D_{\lambda_\ell} \lambda_\ell D_{\lambda_\ell} + \Big(1 - \frac{N}{2}\Big) D_{\lambda_\ell} - \frac{1}{2} X_\ell^2\Big) F_G = 0$$

なる微分方程式を得る。

このようにして (5), (7) という $F_q(p,\lambda)$ を特徴付ける擬微分方程式系を得ることができたが，λ_ℓ は本来質量 $\frac{1}{2}m_\ell^2$ であったから，これを変数と見ることなく，定数と見る方が望ましい。それには D_{λ_ℓ} を消去しなければならない。それには (7) 式を

$$(7')\quad (D_{\lambda_\ell}^{-1} - \Psi_\ell(X_\ell, \lambda_\ell))F_q = 0$$

の形に書き直せばよい。

しかるに (7) において X_ℓ^2 は λ_ℓ, D_{λ_ℓ} とは可換故，これをあたかも定数であるかのように取り扱えば (7) の一般解 u は

$$C(X_\ell)(X_\ell^2\lambda_\ell)^{\frac{\nu}{2}} Z_\nu(\sqrt{2X_\ell^2\lambda_\ell})$$

で与えられる。$(\nu = 1-\frac{N}{2})$ (尚 X_ℓ は，再び基本定理を用いて可逆であることに注意しておこう。)

従って円柱函数の不定積分により

$$D_{\lambda_\ell}^{-1}u = \sqrt{2}C(X_\ell)X_\ell^{\nu-1}\lambda_\ell^{\frac{\nu+1}{2}}Z_{\nu+1}(\sqrt{2}X_\ell\sqrt{\lambda_\ell})$$

故に

$$(7'')\quad D_{\lambda_\ell}^{-1}u = X_\ell^{-1}\lambda_\ell^{\frac{1}{2}}\frac{Z_{\nu+1}(\sqrt{2}X_\ell\sqrt{\lambda_\ell})}{Z_\nu(\sqrt{2}X_\ell\sqrt{\lambda_\ell})}u$$

$$= -\frac{i m_\ell}{\sqrt{2}}X_\ell^{-1}\frac{{}_2F_0(\frac{3}{2}+\nu, -\frac{1}{2}-\nu, \frac{1}{i m_\ell X_\ell})}{{}_2F_0(\frac{1}{2}+\nu, \frac{1}{2}-\nu, \frac{1}{i m_\ell X_\ell})}u$$

ここで Z_ν として H_ν を用いて その無限遠での漸近展開を用いたが, これは擬微分作用素としては well-defined な議論であることが判っている。(S-K-K Chap. II. §2.1等参照。註3

従って (ヌ")を (5) に代入すれば 求める D_{λ_ℓ} を含まぬ方程式系が得られたことになる。又,その主要部 (i.e. 0階斉次の部分) の共通零点が Landau singularity を定めることは見易い。

註3. 厳密に言うと H_ν 自身が擬微分作用素として well-defined なのではないが, その quotient に現われる $_2F_0\left(\frac{3}{2}+\nu, -\frac{1}{2}-\nu, \frac{1}{i m_\ell x_\ell}\right)$ 等は擬微分作用素として well-defined であり, 又, その最高階 (i.e 0階) の部分は 1 故 可逆であるから, 上の D_λ と u との関係式は well-defined な擬微分方程式になる。

(以上 河合隆裕記)

筆記者註: 以上のノートは佐藤先生が 1973年 9月~12月にセミナー等で話されたことを大体忠実にまとめたもののつもりですが, 筆記者自身がこの方面は勉強し始めの為 思わぬ間違いをしているかも判りません。どうか その場合はよろしく

御教示下さい。又，以下の文献も，筆記者が佐藤先生のお話を理解する為に参照したもののみですので，極めて客観性に欠けるものと恐れております。その点も合わせて御教示頂ければ幸いです。又，中西先生にはこのノートをまとめる際いろいろ御教示を頂きました。厚くお礼申し上げます。

文　　献

Bros-Iagolnitzer [1] Ann. Inst. Poincaré, 18 (1973) 147

Iagolnitzer, D. : [1] Introduction to S-matrix theory, CEN-Saclay, 1973

— - Stapp [1] Comm. Math. Phys. 14, 15 (1969)

中西 : [1] プレプリント (RIMS -

[2] Graph Theory and Feynman Integrals, Gorden-Breach, 1971

Pham, F. : [1] Proc. of Nice meeting (1973. 5)

佐藤 - 河合 - 柏原 : [1] Proc. Katata conf. Springer Lecture Note No. 287. Part II.