

Connes の新しい crossed product と
integrable representation について

天王寺高校 榎本雅俊

最近、Connes がいくつかの興味ある概念を crossed product と関連して展開していきまのぞ、ここではそれについて、簡単に紹介したいと思ひます。

先ず、Connes は新しく crossed product を次の様に導入していきます。

(Def. 1) G は locally compact group with the left Haar measure dg とし、 λ は G の left regular representation とする。 M は von Neumann algebra, σ は G から M の Connes の意味での representation (i.e., G から M の automorphisms 全体の作り group の σ -weakly continuous homomorphism) とする。この時、 $M \rtimes_{\sigma} G$ (crossed product of M by σ) は、次の set で Def. する。

$$\{ y \in M \rtimes_{\sigma} \mathcal{L}(L^2(G)); (\sigma_g \otimes A\lambda(g)) y = y \text{ for } \forall g \in G \}. \quad (\text{但し, } A\lambda(g)(x) = \lambda(g)x\lambda(g)^{-1} \text{ (} \equiv z, x \in \mathcal{L}(L^2(G)) \text{)}).$$

この様に crossed product を新しく Def. すると、従来のもの

との関係が問題になるが、discreteの場合には、この Def. はもと a crossed product と一致する、continuous の場合には、locally compact abelian group の時に一致する。この事実を使うと次の proposition が簡単に示される。

(Prop. 2) M は type I factor、 σ は locally compact abelian group G から M への representation とする。この時、 $M \otimes_{\sigma} G$ は、type I von Neumann algebra になる。

(pr.) M は type I factor だから、 σ_g は M の inner automorphism である。だから、 $\sigma_g(x) = u_g x u_g^*$ (但し、 u_g は M の unitary、 x は M の任意の元) と書ける。 $M \otimes_{\sigma} G$ は、 $\sigma \otimes \lambda$ の fixed algebra だから、 $M \otimes_{\sigma} G = \{u_g \otimes \lambda(g) ; g \in G\}$ になるが、 $\{u_g \otimes \lambda(g) ; g \in G\}$ は可換な set だから、 $M \otimes_{\sigma} G$ は type I になる。

次に、integrable representation について述べよう。先ず、

(Def. 3) G は locally compact group with the left Haar measure dg とし、 M は von Neumann algebra、 σ は G から M への representation とする。 $\{x \in M ; \int_G \sigma_g(x x^*) dg \in M\}$ が M で weakly dense である場合には、 σ は integrable であるという。

この時、 $\{x \in M ; \int_G \sigma_g(x x^*) dg \in M\}$ は left ideal であることは注意する。

integrable representation の例として、 G は locally compact

group with the left Haar measure dg とし、 $M = \mathcal{L}(L^2(G))$, $\sigma_g = A\lambda(g)$ とすれば、これが 1 の例を与えてくれることがわかり
ます。integrable representation については、次の事が成り立ち
ます。

(1) G は locally compact group, $\sigma \in G$ から von Neumann algebra M への representation, N は σ -finite von Neumann algebra とす
る。もし、 $\sigma \otimes 1$ が G から $M \otimes N$ への integrable representation
であるとすると、この時、 σ は integrable となる。

(pr.) N は σ -finite だから、faithful normal state Φ が N 上に
取れる。 $E = 1 \otimes \Phi$ を考えると、 E は $M \otimes N$ から $M \otimes \mathbb{C}$ への
conditional expectation がある。この時、 $E(\sigma_g \otimes 1)(x) = (U_g \otimes 1)$
 $E(x)$ ($x \in M \otimes N$) が成り立つ。もし、 $x > 0$, $\int_G (\sigma_g \otimes 1)(x) dg$
 $\in M \otimes N$ であれば、 $E(x) > 0$, $\int_G (U_g \otimes 1)(E(x)) dg \in M \otimes \mathbb{C}$ 。
 $\sigma \otimes 1$ が integrable から、 $\exists (x_\alpha) \subset (M \otimes N)^+$ ($M \otimes N$ の positive
elements 全体); $x_\alpha \uparrow 1$ (strongly), $\int_G (U_g \otimes 1)(x_\alpha) dg \in M \otimes N$ for
 $\forall \alpha$. $E(x_\alpha)$ を考えることにより、 σ が integrable であることが
わかる。

(2) G は locally compact group, $\sigma, \tau \in G$ から von Neumann
algebra M, N への representation とする。もし、 σ が integrable
であると、この時、 $\sigma \otimes \tau$ は integrable となる。

(pr.) σ が integrable であることから、 $\exists (a_\alpha) \subset M^+$; $a_\alpha \uparrow 1$

(strongly), $\int_G \sigma_g(a_x) dg \in M$. 故に. $a_x \otimes 1 \in (M \otimes N)^+$; $a_x \otimes 1 \uparrow 1$

(strongly), $\int_G (\sigma_g \otimes \tau_g)(a_x \otimes 1) dg \in M \otimes N$ 也. $\sigma \otimes \tau$ は integrable なる.

integrable representation を与える条件としては. 次のような条件がある.

(Theorem 4) G は locally compact abelian group が metrizable であるとき. σ を G から von Neumann algebra M への representation で. $\forall \gamma \in \Gamma (= \widehat{G})$, $M(\sigma; \{\gamma\}) \ni \exists$ unitary の条件を満足しているとき. 二の時は. σ は integrable なる.

証明の要旨は. $\sigma \otimes 1$ が integrable であることと示せばよい事だ. 二は. $U \otimes A\lambda$ を考えると. $A\lambda$ は integrable 也. $U \otimes A\lambda$ は integrable なる. 故に. $\sigma \otimes 1$ と $\sigma \otimes A\lambda$ が unitary 同値であることと示せばよい.

又. integrable representation とその fixed algebra の関係については次の事が成り立つ.

(Theorem 5) G は locally compact abelian group, σ を G から factor M への representation で. σ を $(M\sigma) \cap M$ へ制限した時. integrable であるとき. 二の時. $(M\sigma) \cap M$ は type I である.

二を示すには. 次の Theorem を示せば十分である.

(Theorem 6) G は locally compact abelian group, τ を G から von Neumann algebra N への integrable representation で.

$N^\sigma \subset \text{Center } N$ とする。この時、 N は type I である。

何故かと言えば、 $N = (M^\sigma)' \cap M$ とし、 $\sigma|_N = \sigma$ とする。

この時、 $x \in N^\sigma$ とすると、 $x \in M^\sigma$ であり、 $x \in \text{Center } N$ 。つまり、

$N^\sigma \subset \text{Center } N$ となるから。

(Theorem 6) により、 $N^\sigma = \mathbb{C}$ (ergodic) としよ。

この時、 $\hat{G} = \Gamma$ とし、 $E(\sigma) = S_p(\sigma)$ は Γ の closed subgroup

である。 $G/E(\sigma)^\perp$ を考えることにしよう。始めから $E(\sigma) = \Gamma$ と

しよ。 $E(\sigma) = \Gamma$ により、 $N \otimes_\sigma G$ は type I factor である。

$(N \otimes G) \otimes E = N \otimes \mathcal{L}(L^2(G))$ から、 $(N \otimes G) \otimes E$ は (prop. 2) から

type I に注意すると、 N は type I となる。

最後に、Connes は von Neumann algebras の間に次のような新しい概念を導入しよう。

(Def. 6) M_1, M_2 は von Neumann algebras とする。 M_1, M_2 が

du même genre と呼ばれるのは、for $\forall e_1 \in M_1^p$ (M_1 の projection 全体) $(\forall e_2 \in M_2^p)$, $\exists f_1 \leq e_1, \exists f_2 \leq e_2$; $f_1 \in M_1^p, f_2 \in M_2^p$,

$M_{1,f_1} \cong M_{2,f_2}$ を満たすこととする。

これは関して、du même genre であるものとしよ。

(Theorem 7) G は locally compact group with the left Haar

measure dg , M は von Neumann algebra, $\sigma \in G$ から $M \wedge$ の

integrable representation とする。この時、 M^σ と $M \otimes_\sigma G$ は、

du même genre である。

これを手本には、次の2つの Lemma を順次使えばよい。

(Lemma 8) G, M, U は Theorem 7 のものとする。この時、

$$\exists x (\neq 0) \in M \otimes \mathcal{K}(L^2(G)); x(1 \otimes \lambda(g)) = (U_g \otimes 1)(x) \quad (\forall g \in G)$$

証明は、具体的構成による。

(Lemma 9) U, G, M は Theorem 7 のものとする。この時、

$U \otimes 1$ と $U \otimes A\lambda$ は unitary 同値である。

証明は、(Lemma 8) と Connes の 2×2 matrix の方法を用いる。