数理解析研究所講究録
210巻 1974年 1-16

Decomposable operators in continuous fields of Hilbert spaces

東北大 教養 武元英夫

§1. 序

Hilbert spaces の continuous fields 上の unbounded operators に対する decompose の話を進める。ここでの話は Stone [2] によって導入された Hilbert space における unbounded operators に対する characteristic matrix を考えることによって、Nussbaum [3] の話を各 fibre がかならずしも separable でないものにまで拡張することである。

ここでは次の様な記号，概念を使っていく。

1). Ω ; Stonean space

2). $C(\Omega)$; Ω 上の all complex-valued continuous functions の algebra

3). $\{H(\omega)\,;\,\omega\in\Omega\}$ を Ω 上の Hilbert spaces の field とした時，$\xi=\{\xi(\omega)\}\in\prod H(\omega)$ を vector field と呼ぶ。

4). $\xi=\{\xi(\omega)\}$, $\eta=\{\eta(\omega)\}$ に対して，

$$(\xi,\eta)\,:\,\omega\to(\xi(\omega)|\eta(\omega)),\qquad |\xi|\,:\,\omega\to\|\xi(\omega)\|$$

5)。 $A = \{A(\omega)\} \in \prod B(H(\omega))$ を operator field と呼び $\xi = \{\xi(\omega)\} \in \prod H(\omega)$ について $A\xi$ を $\{A(\omega)\xi(\omega)\}$ によって $A\xi$ を定める。

6)。 $C_F(\Omega, H(\omega))$ を[3]で定めた F を fundamental subspace として持つ continuous field of Hilbert spaces over Ω とする。

ここでは話の都合上、Ω を Stonean space として話を進めて行くが、内容の多くはそれに限られてはいない。

7)。 A ; $H = C_F(\Omega, H(\omega))$ における operator で定義域 $\mathcal{D}(A)$ をもっているとする。その時、$\mathcal{D}(A)$ は submodule で A は $\mathcal{D}(A)$ 上の $C(\Omega)$-module homomorphism であるとする。

§2。 S-closed operator。

$H = C_F(\Omega, H(\omega))$ における operator A が closed であるとは、Hilbert space における operator theory と同じく graph $G(A) = \{\{\xi, A\xi\} : \xi \in \mathcal{D}(A)\}$ が closed になることである。更に closedness にもう少し条件をつけることによって S-closed operator なるものを導入しよう。その前に幾つかの考えを使う。

$H = C_F(\Omega, H(\omega))$: continuous field of Hilbert spaces over Ω.

$S \subset H$: closed submodule

$S(\omega) = \{\xi(\omega) : \xi \in S\}$ for every $\omega \in \Omega$.

その時、次を得る。

補題2.1.

$\mathbb{H} = C_F(\Omega, \mathbb{H}(\omega))$: continuous field of Hilbert spaces over Ω.

$S \subset \mathbb{H}$: closed submodule

$\Rightarrow$

$S(\omega)$: closed subspace of $\mathbb{H}(\omega)$, for every $\omega \in \Omega$.

以上の事から次の概念を導入する。次の定義は Kaplansky[4] の AW^*-submodule に相当するが、我々のものは Ω が Stonean space でなくても考えることが出来るわけである。

定義2.2.

$\mathbb{H} = C_F(\Omega, \mathbb{H}(\omega))$: continuous field of Hilbert spaces over Ω.

$S \subset \mathbb{H}$: closed submodule

S が continuous submodule であるとは $S = C_S(\Omega, S(\omega))$ となることである。

その時、我々は次の事を得る。

定理2.3.

$\mathbb{H} = C_F(\Omega, \mathbb{H}(\omega))$: continuous field of Hilbert spaces over Ω.

$S \subset \mathbb{H}$: closed submodule

その時、次の二つは同値である。

(1) S は continuous submodule である。

(2) $^\forall \xi \in \prod S(\omega) \ni \omega \to \|\xi(\omega)\|$: 有界, $^\forall \eta \in S$ において, $\omega \to (\xi(\omega) | \eta(\omega))$: 連続

$\Rightarrow \xi \in S$.

上の事は、次の事からも分る様に $H = C_F(\Omega, H(\omega))$ での projection を決定することになる。そして、Stone による characteristic matrix を考える時にはどうしても projection の話が必要となるので上の事と次の事を考えたわけである。

<u>系 2.4.</u>

∘ $H = C_F(\Omega, H(\omega))$: continuous field of Hilbert spaces over Ω.

$S \subset H$: continuous submodule

$\Rightarrow \exists p$: projection, $p\xi = \xi$ for $^\forall \xi \in S$.

∘ 逆に、$p \in B(H)$ を projection (i.e. $p^2 = p$, $p^* = p$) とすると $S = pH$ は continuous submodule となる。

$H_i = C_{F_i}(\Omega, H_i(\omega))$ $(i = 1, 2)$: continuous fields of Hilbert spaces

$H_1 \oplus H_2$: H_1 と H_2 の direct sum

$\{\xi_1, \xi_2\} \in H_1 \oplus H_2$, $\{\eta_1, \eta_2\} \in H_1 \oplus H_2$, $z \in C(\Omega)$ において.

$$(\{\xi_1, \xi_2\}, \{\eta_1, \eta_2\}) = (\xi_1, \eta_1) + (\xi_2, \eta_2)$$

$$z\{\xi_1, \xi_2\} = \{z\xi_1, z\xi_2\},$$

$$\|\{\xi_1, \xi_2\}\| = \|\,|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2\,\|^{1/2}$$

すると，$H_1 \oplus H_2$ は $C(\Omega)$- moduled normed space となる。更に，簡単な計算で次の事がわかる。

<u>命題 2.5。</u>

$H_i = C_{F_i}(\Omega, H_i(\omega))$ $(i=1,2)$: continuous fields of Hilbert spaces over Ω

$\Rightarrow$

$$H_1 \oplus H_2 = C_{F_1 \oplus F_2}(\Omega, H_1(\omega) \oplus H_2(\omega)).$$

A : operator with the domain $\mathcal{D}(A)$ in $H = C_F(\Omega, H(\omega))$

(1) A : closed extension をもつ．

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\{\xi_n\}, \{\eta_n\} \subset \mathcal{D}(A)$; $\lim \xi_n = \lim \eta_n$

けて $\exists \lim A\xi_n$, $\exists \lim A\eta_n$ $\Rightarrow$ $\lim A\xi_n = \lim A\eta_n$.

この時，$\overline{G(A)}$ in $H \oplus H$ がある operator $\bar{A}$ の graph となる。$\bar{A}$ を A の closure という。

(2) A^* : $(A\xi, \eta) = (\xi, \eta^*)$ for $\forall \xi \in \mathcal{D}(A)$ なる η, η^* が存在する時，$A^*\eta = \eta^*$ とおく．

(3) $\tilde{\mathcal{D}}(A) = \{\xi = \sum e_\alpha \xi_\alpha : \{\xi_\alpha\} \subset \mathcal{D}(A) : \text{bdd}, \{A\xi_\alpha\} : \text{bdd}, \{e_\alpha\} \subset C(\Omega)_p : \text{orth}, \sum e_\alpha = 1\}$.

$\tilde{A}$: $\tilde{\mathcal{D}}(A)$ 上，$\tilde{A}(\sum e_\alpha \xi_\alpha) \equiv \sum e_\alpha A\xi_\alpha$.

その時、$B \supset A$, $G(B)$ が $H \oplus H$ での continuous submodule になる operator B が存在すれば $B \supset \widehat{A}$ となり、更に $\widehat{A}$ の closure $\overline{\widehat{A}}$ に対して、$G(\overline{\widehat{A}})$ は $H \oplus H$ での continuous submodule となる。

定義 2.6.

$H = C_F(\Omega, H(\omega))$: continuous field of Hilbert spaces

A : 定義域 $\mathfrak{D}(A)$ をもつ operator

(1) A : s-closed operator $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ $G(A)$: continuous submodule in $H \oplus H$

(2) A : s-closure をもつ $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ $\widehat{A}$ が closed extension をもつ。

その時、A の s-closure を $\overline{A}^s$ とかくと $\overline{A}^s = \overline{\widehat{A}}$ となる。

A^* の def. を前に述べたが、$\widehat{\mathfrak{D}}(A)$ が $H = C_F(\Omega, H(\omega))$ で dense であるならば A^* は定義される。しかも、その時、A^* は常に s-closed operator となる。

次に、Hilbert space 上の operator theory から次の事柄が簡単に導かれることがわかる。

命題 2.7.

(1) A : $\widehat{\mathfrak{D}}(A)$ が $H = C_F(\Omega, H(\omega))$ で dense な s-closed op. $\Rightarrow$ $A = A^{**}$

(2) A : $\widehat{\mathfrak{D}}(A)$ が dense で $\widehat{A}$ が closure をもつ

$\Rightarrow$ $\exists A^{**}$, $\overline{G(\widehat{A})} = G(A^{**})$.

§3. S-closed operator に対する characteristic matrix.

$H = C_F(\Omega, H(\omega))$ に対し, S を $H\oplus H \to H\oplus H$ の bounded $C(\Omega)$-module homomorphism (ここでは単に $H\oplus H$ 上の bounded operator と呼んでいる) とする。今 $H\oplus 0$, $0\oplus H$ が共に $H\oplus H$ の continuous submodule になっているから, $H\oplus H$ から $H\oplus 0$, $0\oplus H$ 上への projection が夫々, 存在している。それらを夫々, E_1, E_2 とおく。今 $S'_{ij} = E_j S E_i$ $(i, j = 1, 2)$ とすると

$S'_{11} : H\oplus 0 \to H\oplus 0$, $\quad S'_{12} : H\oplus 0 \to 0\oplus H$

$S'_{21} : 0\oplus H \to H\oplus 0$, $\quad S'_{22} : 0\oplus H \to 0\oplus H$.

ここで. $H\oplus 0$, $0\oplus H$ を夫々 H と同じものであると考え, S'_{ij} を $H\to H$ への operator として見たものを S_{ij} とおく。すると.

$$S : \{\xi_1, \xi_2\} \to \{S_{11}\xi_1 + S_{12}\xi_2,\ S_{21}\xi_1 + S_{22}\xi_2\}$$

となる。そこで. $S = (S_{ij})$ とおいて, S の matrix representation と呼ぶことにする。

$\mathfrak{M}$: $H\oplus H = C_{F\oplus F}(\Omega, H(\omega)\oplus H(\omega))$ の continuous submodule

P : $H\oplus H \to \mathfrak{M}$ projection

$P = (P_{ij})$: P の matrix representation

その時, 次の事が挙がる。

命題 3.1. $H = C_F(\Omega, H(\omega))$: continuous field of Hilbert spaces

M : $H \oplus H$ の continuous submodule

$P = (P_{ij})$: $H \oplus H \to M$ projection

その時,

$\exists A$: s-closed operator, $G(A) = M \rightleftarrows P_{12}\xi = (I - P_{22})\xi = 0 \Rightarrow \xi = 0$.

上の条件が挙がる時, A は次の形で一意に定まる.

A : $P_{11}\xi_1 + P_{12}\xi_2 \to P_{21}\xi_1 + P_{22}\xi_2$, $\forall \xi_1, \xi_2 \in H$.

これから, $P_{21} = AP_{11}$, $P_{22} = AP_{12}$ となる。

定義 3.2.

A : $H = C_F(\Omega, H(\omega))$ での s-closed operator.

P : $H \oplus H \to G(A)$, projection.

P の matrix representation (P_{ij}) を A の characteristic matrix という。

すると, characteristic matrix に対して, 次の性質が挙がる。

命題 3.3.

(P_{ij}) : s-closed operator A の characteristic matrix.

if $\exists A^{-1} \Rightarrow A^{-1}$: s-closed operator.

(Q_{ij}) : A^{-1} の characteristic matrix

$\Rightarrow$ $Q_{11} = P_{22}$, $Q_{12} = P_{21}$, $Q_{21} = P_{12}$, $Q_{22} = P_{11}$.

命題 3.4。

(P_{ij}), (Q_{ij}) : 夫々 A, A^* の characteristic matrix

$\Rightarrow$ $Q_{11} = I - P_{22}$, $Q_{12} = P_{21}$, $Q_{21} = P_{12}$, $Q_{22} = I - P_{11}$.

§4。 Decomposable operators.

$H = C_F(\Omega, H(\omega))$: continuous field of Hilbert spaces.

次の事柄は〔3〕で示されている。

(1) $A \in B(H)$ に対して, $\exists \{A(\omega)\} \in \prod B(H(\omega))$: $\forall \xi, \eta \in H$, $((A\xi)(\omega) | \eta(\omega)) = (A(\omega)\xi(\omega) | \eta(\omega))$ for $\forall \omega \in \Omega$.

(2) $\{A(\omega)\} \in \prod B(H(\omega)) \ni \omega \to \| A(\omega) \|$: bounded, $\forall \xi \in H$ に対して $\{A(\omega)\xi(\omega)\} \in H$ $\Rightarrow$ $\exists A \in B(H)$: $\forall \xi, \eta \in H$, $((A\xi)(\omega) | \eta(\omega)) = (A(\omega)\xi(\omega) | \eta(\omega))$, $\forall \omega$

(1)の形のものを decomposable といい，(2)を満たした operator field を continuous であると呼んで来た。(1)から $B(H)$ の元は operator field として考えられ，(2)でのものは $B(H)$ の元として考えられるということを云っている。

この節では，closed operators に対して，上の(1)，(2)に相当することを考える。それには，§3で導入した s-closed operator の characteristic matrix の概念を使用する。

補題 4.1。 $S = \{S(\omega)\} \in B(H)$: self-adjoint

$\exists\, S(\omega)^{-1}$ for ${}^\forall \omega \in \Omega$ (かならずしも bounded を仮定しない。)

, then,

${}^\forall \xi \in H \ni \xi(\omega) \in \mathcal{D}(S(\omega)^{-1})$, ${}^\forall \omega \in \Omega$, $\omega \to \| S(\omega)^{-1}\xi(\omega)\|$: bounded

$\Rightarrow \quad \{ S(\omega)^{-1}\xi(\omega)\} \in H = C_{\mathcal{F}}(\Omega, H(\omega))$.

定理 4.2. $\{A(\omega)\}$: closed operators の field.

$(P_{ij}(\omega))$: $A(\omega)$ の characteristic matrix.

$\{P_{ij}(\omega)\}$ $(i,j=1,2)$: continuous

$\xi \in H$: $\xi(\omega) \in \mathcal{D}(A(\omega))$, ${}^\forall \omega \in \Omega$, $\omega \to \| A(\omega)\xi(\omega)\|$: bounded

$\Rightarrow \quad \{ A(\omega)\xi(\omega)\} \in H = C_{\mathcal{F}}(\Omega, H(\omega))$

定理 4.3. $H = C_{\mathcal{F}}(\Omega, H(\omega))$: continuous field of Hilbert spaces

$\{A(\omega)\} \in \prod B(H(\omega))$: $\omega \to \|A(\omega)\|$ が bounded.

$(P_{ij}(\omega))$: $A(\omega)$ の characteristic matrix.

その時，次は同値である。

(1) $\{A(\omega)\}$: continuous. (2) $\{P_{ij}(\omega)\}$ $(i,j=1,2)$: continuous.

定義 4.4. $\{A(\omega)\}$: closed operators の field.

$(P_{ij}(\omega))$: $A(\omega)$ の characteristic matrix.

field $\{A(\omega)\}$ が continuous であるとは，各 field $\{P_{ij}(\omega)\}$ が continuous になることである。

上の定義が意味をもつことは、定理4.3で示した様に、bounded operators の field に対して、今まで知られているものと同値になることからわかる。

$\{A(\omega)\}$: closed operators の field, continuous.

$E \equiv \{ \xi \in H : \xi(\omega) \in \mathfrak{D}(A(\omega)), \forall \omega \in \Omega,\ \omega \to \|A(\omega)\xi(\omega)\| : \text{bounded}\}$

その時、E は submodule となる。定理4.2 から $E \ni \xi$ に対して、$\eta = \{A(\omega)\xi(\omega)\} \in H = C_F(\Omega, H(\omega))$ であるから我々は次の様にして、operator in $H = C_F(\Omega, H(\omega))$ を定義することが出来る。

A : $A\xi \equiv \eta$ where $\eta = \{A(\omega)\xi(\omega)\}$, $\xi \in E$.

すると、次の事がわかる。

<u>定理4.5</u>。 $\{A(\omega)\}$: continuous field of closed operators.

$\Rightarrow$ A ; s-closed operator.

$\mathfrak{D}(A) = E$. where A, E は前に定められたもの。

<u>系4.6</u>。 $\{A(\omega)\}, \{B(\omega)\}$: continuous field of closed operators

if $\{A(\omega)\} = \{B(\omega)\}$ $\Rightarrow$ $A(\omega) = B(\omega)$, for $\forall \omega \in \Omega$.

<u>系4.7</u>。 $\{A(\omega)\}$: continuous field of closed operators.

$\mathfrak{D}(A(\omega))$: dense in $H(\omega)$ ($\forall \omega$), $A = \{A(\omega)\}$ (定理4.5の意味で)

$\Rightarrow$ $\{A(\omega)^*\}$: continuous, $A^* = \{A(\omega)^*\}$.

以上の事柄は continuous の定義に従って、characteristic matrix の性質を調べていくとわかる。

$\{A(\omega)\}$ が closed operators の continuous field の時は s-closed operator $A \ni \mathcal{D}(A) = \{\xi \in H : \xi(\omega) \in \mathcal{D}(A(\omega)), \{\|A(\omega)\xi(\omega)\|\}$が有界$\}$, $\mathcal{D}(A(\omega)) = \{\xi(\omega) : \xi \in \mathcal{D}(A)\}$, $(A\xi)(\omega) = A(\omega)\xi(\omega)$ $\forall \xi \in \mathcal{D}(A)$, $\omega \in \Omega$ なるものが存在した。これから、cont. closed op.'s の field は $H = C_F(\Omega, H(\omega))$ における s-closed operator として考えられる。次に、s-closed operator が closed operators の field に分解出来るかということを考えて行こう。

<u>定義 4.8.</u> $H = C_F(\Omega, H(\omega))$: continuous field of Hilbert spaces.

A : 定義域 $\mathcal{D}(A)$ をもつ s-closed operator.

A が decomposable であるとは、closed operators の continuous field $\{A(\omega)\}$ が存在して、$A = \{A(\omega)\}$ となることである。

我々は全ての s-closed operator が decomposable であってほしいが残念ながら次の例でも分る様に、定義域から generate される continuous submodule が全体であっても decomposable ではない s-closed operator の例を作ることが出来る。

例 4.9.

$H = C_F(\beta N, H(\omega))$, βN : N の Stone-Čech compactification.

これは center が $C(\beta N)$ となる様な type I von Neumann algebra を持って来ると上の H の存在がわかる。

$f \in C(\beta N)$: $f(n) = \frac{1}{n}$, $f(\omega) = 0$ for $\forall \omega \in \beta N \setminus N$.

$D = fI$, i.e. $\forall \xi \in H$, $(D\xi)(\omega) = f(\omega)\xi(\omega)$ $\Rightarrow$ $0 \leq D \leq 1$.

今 $P = \begin{pmatrix} D & (D(I-D))^{1/2} \\ (D(I-D))^{1/2} & D \end{pmatrix}$

とすると、P に対して命題 3.1 が挙がる。従って、P を characteristic matrix としてもつ様な s-closed operator A が存在する。しかし、$\omega \in \beta N \setminus N$ に対して $D(\omega) = 0$ を考えると A は decomposable にならないことがわかる。

そこで、定義域が $H = C_F(\Omega, H(\omega))$ で dense になる様な s-closed operator を考えると、次の定理に示す様に、それは decomposable となる。

定理 4.10. $C_F(\Omega, H(\omega)) = H$: continuous field of Hilbert spaces.

A : densely defined s-closed operator in H

$\Rightarrow$

A : decomposable.

§5。応用.

前節で densely defined s-closed operator は decomposable となることを示した。逆に, $\{A(\omega)\}$ を closed operators の continuous field で各 $A(\omega)$ が densely defined であるならば $A=\{A(\omega)\}$ は densely defined s-closed operator となる。

この節では densely defined s-closed operator に対する polar decomposition について話す。その前に, densely def. self-adjoint, positive operator に対して, その square root が存在することを示す。

<u>補題5.1。</u> $H=C_F(\Omega, H(\omega))$: continuous field of Hilbert spaces

A : densely defined s-closed operator.

$\Rightarrow$

A^*A : self-adjoint, positive; $A^*A=\{A(\omega)^*A(\omega)\}$.

<u>定理5.2。</u>

$A=\{A(\omega)\}$: $H=C_F(\Omega, H(\omega))$ で self-adjoint, positive operator

$\Rightarrow$

$\exists_1 B=\{B(\omega)\}$: self-adjoint, positive, $B^2=A$.

そこで, A^*A の square root を $|A|$ とかいて A の絶対値と云う。

すると，我々は densely defined s-closed operator $A=\{A(\omega)\}$ の polar decomposition を考えることが出来る。

$A=\{A(\omega)\}$: $H=C_F(\Omega, H(\omega))$ での densely defined s-closed operator その時，H での subset H_1, H_2 を次の様に定める。

H_1 = the closure of $\{\sum e_\alpha |A| \xi_\alpha$: $\{|A|\xi_\alpha\}$ は bounded, $\{e_\alpha\}\subset C(\Omega)_p, \sum e_\alpha = 1\}$

H_2 = the closure of $\{\sum e_\alpha A \xi_\alpha$: $\{A\xi_\alpha\}$ は bounded, $\{e_\alpha\}\subset C(\Omega)_p, \sum e_\alpha = 1\}$

すると，H_1, H_2 の両方は共に H の continuous submodule となる。今 E_i $(i=1,2)$ を $H\to H_i$ への projection として，次の様な operator V を定義する。

$$V' : \quad V'(\sum e_\alpha |A| \xi_\alpha) = \sum e_\alpha A \xi_\alpha .$$

I)

$$\| \sum e_\alpha |A| \xi_\alpha \| = \sup \| e_\alpha |A| \xi_\alpha \| = \sup \| e_\alpha A \xi_\alpha \| = \| \sum e_\alpha A \xi_\alpha \| .$$

従って，V' は isometry となる。今 V' の H_1 への extension を V'' として，$V=E_2 V'' E_1$ とおくと，V は initial domain E_1 final domain E_2 をもつ partial isometry となる。更に，定義から明らかに，$A=V|A|$ となる。

上の論の中で，Hilbert space における operator theory と同様に，$\mathfrak{D}(|A|)=\mathfrak{D}(A)$ なることが考えられている。

以上の事より次の定理を得る。

・<u>定理 5.3.</u>

$H = C_F(\Omega, H(\omega))$: continuous field of Hilbert spaces.

$A = \{A(\omega)\}$: densely defined s-closed operator.

$\Rightarrow$

$\exists_1 V$; partially isometrical operator, $A = V|A|$.

Referances.

[1] A. Nussbaum ; Duke Math. J., 31 (1964), 33-44.

[2] M. Stone ; J. of the Indian Math. Soc., 15 (1951), 155-192.

[3] H. Takemoto ; Michigan Math. J., 20 (1973), 115-127.

[4] I. Kaplansky ; Amer. J. Math., 75 (1953), 839-858.