

2つの2重可移 suborbits を持つ
rank 5 の原始置換群

東大 大学院 伊藤達郎

$G =$ a primitive group on Ω , $|\Omega| < \infty$, を $\Omega \times \Omega$ 上に自然に働かせたときの orbits を

$\Gamma_0 = \text{diagonal}$, $\Gamma_1 = \Gamma$, $\Gamma_2 = \Delta$, $\Gamma_3, \dots, \Gamma_{r-1}$, (r は G の rank) とする。 $\alpha \in \Omega$ の stabilizer を G_α とすると、

$$\Gamma_i(\alpha) = \{ \beta \in \Omega \mid (\alpha, \beta) \in \Gamma_i \}$$

は G_α -orbit になり、 G_α -orbits はすべてこうして得られる。

Cameron の定理 以上のような状況の下で

$$(1) \begin{cases} G_\alpha = 2 \text{ 重可移 on } \Gamma(\alpha) \text{ and } \Delta(\alpha) \\ (*) \quad 1 < v < w, \quad |\Gamma(\alpha)| = v, \quad |\Delta(\alpha)| = w \end{cases}$$

$$\Rightarrow r \geq 5$$

$$(2) \begin{cases} (*), \quad r = 5 \\ w = v + 1 \end{cases} \Rightarrow v = 11, w = 12, |\Omega| = 266$$

$$G \cong J_1, \text{ Janko group of order } 175560$$

この定理の(2)の一つの拡張として次の事が得られた。

定理

$$\begin{cases} (*) , r=5 \\ \Gamma \circ \Gamma \neq \Delta \circ \Delta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v=11, w=12, |\Omega|=266 \\ G \cong J_1 \end{cases}$$

ただし

$$\Gamma_i \circ \Gamma_j = \{ (\alpha, \beta) \in \Omega \times \Omega \mid \alpha \neq \beta, \exists \gamma \in \Omega \text{ s.t. } (\alpha, \gamma) \in \Gamma_i, (\gamma, \beta) \in \Gamma_j \}$$

$$\text{注意 } \begin{cases} (*) , r=5 \\ w \geq 2v \text{ or } w = v+1 \end{cases} \Rightarrow \Gamma \circ \Gamma \neq \Delta \circ \Delta$$

定理の証明 $v > 2$ としよ。 ([7] の theorem 18.7 による。)I (i) $\Gamma = \Gamma', \Delta = \Delta'$ self-paired

$$\text{ただし } \Gamma' = \{ (\alpha, \beta) \in \Omega \times \Omega \mid (\beta, \alpha) \in \Gamma \}$$

$$\Delta' = \{ (\alpha, \beta) \in \Omega \times \Omega \mid (\beta, \alpha) \in \Delta \}$$

(ii) G_α -orbits は次の 5 つ

$$\{ \alpha \}, \Gamma(\alpha), \Gamma \circ \Gamma(\alpha), \Delta \circ \Delta(\alpha), \Delta(\alpha)$$

$$|\Gamma \circ \Gamma(\alpha)| = \frac{v(v-1)}{k} \quad k \leq \frac{v-1}{2} \quad \text{for some positive}$$

$$|\Delta \circ \Delta(\alpha)| = \frac{w(w-1)}{l} \quad l \leq \frac{w-1}{2} \quad \text{integer } k, l.$$

(iii) $\Gamma \circ \Delta = \Delta \circ \Gamma = \Delta \circ \Delta$

$$|\Gamma \circ \Delta(\alpha)| = vw \quad \text{特に } w = lv + 1.$$

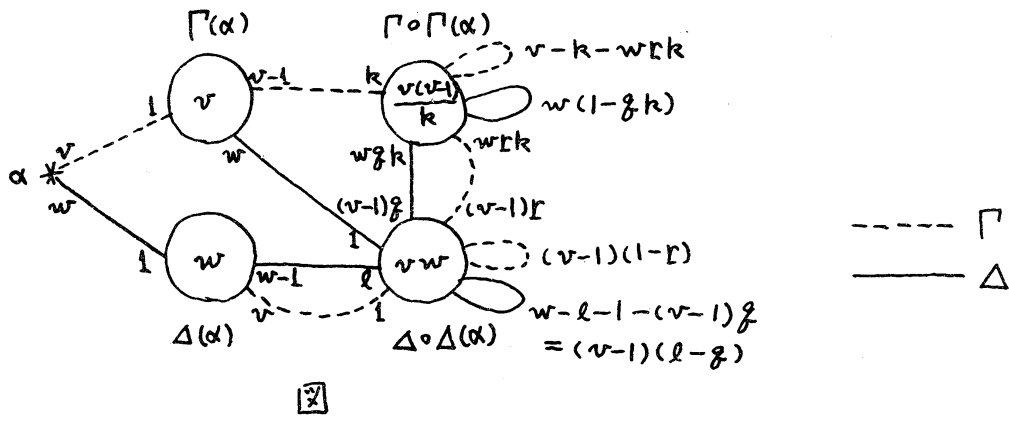
⊙ (i) [2] の section 1 と [3] の theorem 1 による。

(ii) [2] の theorem 2.2 による。

(iii) π_1 と π_2 をそれぞれ G_α on $\Gamma(\alpha)$ と G_α on $\Delta(\alpha)$ の permutation character とすると、 $\pi_1 \cdot \pi_2$ は G_α on $\Gamma(\alpha) \times \Delta(\alpha)$ の permutation

character. $\pi_1 = 1 + \psi_1$, $\pi_2 = 1 + \psi_2$, (ただし 1 は principal character) とすると, ψ_1, ψ_2 はそれぞれ degree $v-1, w-1$ の irreducible character になるから, $(1, \pi_1 \pi_2) = \sum_{x \in G_\alpha} \pi_1(x) \pi_2(x) / |G_\alpha| = (\pi_1, \pi_2) = 1$. 従って G_α は $\Gamma(\alpha) \times \Delta(\alpha)$ 上可移. よって $\Gamma \circ \Delta$ は single suborbit. [4] と同様にして $|\Gamma \circ \Delta(\alpha)| = vw$, $\Gamma \circ \Delta = \Delta \circ \Delta$.

II.



$$(v-1)l = |\Gamma \circ \Gamma(\alpha) \cap \Gamma(e)| \quad e \in \Delta \circ \Delta(\alpha)$$

$$(v-1)g = |\Gamma \circ \Gamma(\alpha) \cap \Delta(e)|$$

とすると

$$k = l, \quad g = \frac{l}{1+l}, \quad l = \frac{1}{1+l}$$

$$1+l \mid v-1.$$

⊙ $B = (b_{ij})$ $n \times n$ 行列, $n = |\Omega|$ を Γ に対応する incidence matrix とする。すなわち $b_{ij} = \begin{cases} 1, & (j, i) \in \Gamma \\ 0, & (j, i) \notin \Gamma. \end{cases}$

C, D, E をそれぞれ $\Gamma \circ \Gamma, \Delta \circ \Delta, \Delta$ に対応する

incidence matrix とする。G を自然に $GL(n, \mathbb{C})$ の部分群とみなして、G の各元と可換な $n \times n$ 行列全体を $V(G)$ と書けば、 $I =$ 単位行列、 B, C, D, E は $V(G)$ のベクトル空間としての基底をなす。 Γ に關するグラフの diameter は 4 (maximal diameter) だから、 $V(G)$ は algebra として B で生成される。特に $V(G)$ は可換。図より次の関係式がわかる。

$$B^2 = vI + kC$$

$$BE = D$$

$$E^2 = wI + lD$$

$$EC = w(1 - \beta k)C + (v-1)\beta D$$

$$ED = wB + w\beta kC + (v-1)(l-\beta)D + (w-1)E$$

従、て

$$(E(E-lB))(E+B) = w(E+B)$$

$$\begin{aligned} \parallel \\ E((E-lB)(E+B)) &= wB + wk(\beta - l + \beta kl)C \\ &\quad + (v-1)(l-\beta - kl\beta)D + wE. \end{aligned}$$

故に $\beta - l + \beta kl = 0$, $\beta = \frac{l}{1+kl}$. 一方 $\beta(v-1)$, βkw は intersection number だから整数。よって

$$1+kl \mid l(v-1), 1+kl \mid lv+1, 1+kl \mid l+1; k=1,$$

$$\beta = \frac{l}{1+l}, 1+l \mid v-1. \text{同様にして, } B(BE) = B^2E \text{ から}$$

$$l = 1 - \beta k = \frac{1}{1+l} \text{ を得る。}$$

III. $s = l+1$, $t = \frac{v-1}{1+l}$ とおくと、IIにより $s (\geq 2)$, $t (\geq 1)$ は整数。 Γ に対応する intersection matrix は、

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ v & 0 & 1 & & \\ & v-1 & t-1 & t & \\ & & v-t & v-t-1 & v \\ 0 & & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

i) minimal polynomial of B

$$= \text{min. poly. of } M$$

$$= \text{characteristic poly. of } M$$

$$= (x-v)F_4(x)$$

$$\therefore F_4(x) = x^4 + 2x^3 - 2stx^2 - (3st-t+2)x + (st+1)(t-1)$$

$F_4(x) = 0$ の根は、相異なる実数。

ii) θ を $F_4(x) = 0$ の根、 $m(\theta)$ を θ の B の固有値としての重複度とすると、

$$m(\theta) = \frac{-m v (v-1)(v-t)t}{(\theta-v)F_4'(\theta)F_3(\theta)}, \quad n = |\Omega|$$

\therefore

$$F_4'(x) = \frac{dF_4(x)}{dx}, \quad F_3(x) = x^3 + x^2 - (2st-t+1)x - (st-t+1).$$

③ i) [5] による。

ii) [1] の Prop. B の証明と同様。

IV. $F_4(x) = 0$ は少なくとも一つは整数でない根をもつ。

③ $t \leq 8(s-1)^2$ のとき

$$F_4\left(\sqrt{\frac{t}{2}} - 1\right) > 0, \quad F_4\left(\sqrt{\frac{t}{2}} - \frac{1}{2}\right) < 0.$$

$$F_4(-\sqrt{\frac{t}{2}}-1) < 0, F_4(-\sqrt{\frac{t}{2}}-\frac{1}{2}) > 0.$$

故に $F_4(x)=0$ の根 θ_2, θ_3 があって

$$\sqrt{\frac{t}{2}}-1 < \theta_2 < \sqrt{\frac{t}{2}}-\frac{1}{2}, -\sqrt{\frac{t}{2}}-1 < \theta_3 < -\sqrt{\frac{t}{2}}-\frac{1}{2}.$$

特に $-2 < \theta_2 + \theta_3 < -1$. よって θ_2 か θ_3 は整数でない。

$t > 8(s-1)^2$ のとき

$\rho = \sqrt{s + \sqrt{s^2 - s}}$ とおけば、前と同様にして $F_4(x)=0$ の根

θ_1, θ_4 があって

$$\rho\sqrt{t}-\frac{1}{2} < \theta_1 < \rho\sqrt{t}, -\rho\sqrt{t}-\frac{1}{2} < \theta_4 < -\rho\sqrt{t}.$$

特に $-1 < \theta_1 + \theta_4 < 0$. よって θ_1 か θ_4 は整数でない。

V. $s=2, t=5$.

⊙ 整数 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ と有理数 ξ, λ, μ, ν を次の式をみたすように決める。

$$-\frac{1}{t}(x-\nu)F_4(x)F_3(x) \equiv \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta \pmod{F_4(x)}$$

$$(\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta)(x-\xi) \equiv \lambda x^2 + \mu x + \nu \pmod{F_4(x)}$$

θ を $F_4(x)=0$ の根で整数でないものとする。

$$\textcircled{H}_1(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$$

$$\textcircled{H}_2(x) = \frac{\lambda x^2 + \mu x + \nu}{x - \xi}$$

とおくと、IIIの(ii)により

$$m(\theta) = \frac{n\nu(\nu-1)(\nu-t)}{\textcircled{H}_1(\theta)} = \frac{n\nu(\nu-1)(\nu-t)}{\textcircled{H}_2(\theta)}$$

よって $F_4(\xi) \neq 0$ に注意する。 ($F_4(\xi) \neq 0$ の証明:

$$-2 < \xi = \frac{\beta}{\alpha} - 2 = -1 - \frac{(s-3)t}{s(s-1)t + 2(s-2)} \begin{cases} = -\frac{1}{2} & s=2 \\ = -1 & s=3 \\ < -1 & s \geq 4 \end{cases}$$

$s \neq 3$ なら ξ は代数的整数でないから $F_4(\xi) \neq 0$, $s = 3$ なら $F_4(\xi) = 3t^2 \neq 0$.) $R = \mathbb{H}_1(\theta) = \mathbb{H}_2(\theta)$ は $m(\theta)$ が整数だから有理数. θ は $\lambda x^2 + \mu x + \nu - R(x-\xi)$, $(\lambda, \mu, \nu, R, \xi \in \mathbb{Q})$ の根で、非整数だから、 $\mathbb{Q}[x]$ で既約な多項式 $H(x)$

$$H(x) = x^2 + Px + Q \quad P, Q \in \mathbb{Z}$$

の根としてよい. $H(x)$ は $\mathbb{H}_1(x) - R$, $\lambda x^2 + \mu x + \nu - R(x-\xi)$ を $\mathbb{Q}[x]$ の中で割り切る. 従って.

$$\begin{cases} \alpha P^2 - \beta P - \alpha Q + \gamma = 0 \\ Q = -\xi P + \frac{\xi\mu + \nu}{\lambda} \\ (P-1)^2 = 1 + \frac{\xi\mu + \nu}{\lambda} - \frac{\gamma}{\alpha} \\ = 35t + t + 1 - \frac{X}{Y} \end{cases}$$

$$\therefore X = (9s^3 - 37s^2 + 35s + 9)t^2 + (9s^2 - 26s + 1)t$$

$$Y = (s^4 - 2s^3 + s^2)t^2 + (3s^3 - 5s^2 - 3s + 9)t + (2s^2 - 2s - 4)$$

$(P-1)^2 \in \mathbb{Z}$ より $\frac{X}{Y} \in \mathbb{Z}$. $s \geq 2$, $t \geq 1$ のとき $\frac{X}{Y}$ が整数になるのは $s=2$, $t=5$ のときにかぎる.

文献

- [1] E. Bannai and T. Ito, On finite Moore graphs, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 20 (1973), 191-208.
- [2] P. J. Cameron, Permutation groups with multiply transitive suborbits, Proc. London Math. Soc. (3) 25 (1972), 427-440.

- [3] P. J. Cameron, Primitive groups with most suborbits doubly transitive, *Geometriae Dedicata* 1 (1973), 434-446.
- [4] P. J. Cameron, Another characterization of the small Janko group, *J. Math. Soc. Japan* 25 (1973).
- [5] D. G. Higman, Intersection matrices for finite permutation groups, *J. Algebra* 6 (1967), 22-42.
- [6] D. Livingstone, On a permutation representation of the Janko group, *J. Algebra* 6 (1967), 43-55.
- [7] H. Wielandt, "Finite Permutation Groups", Acad. Press, New York-London, 1969.