数理解析研究所講究録
211巻 1974年 60-66

ある種の対称デザインについて

阪大 教養 野田隆三郎

次の parameter をもつ対称デザインに関する二，三の話題について述べます.（以下，(*)型の対称デザインという）.

(*) $(v, k, \lambda) = (4a^2, a(2a-1), a(a-1))$.

(*)型の対称デザインの存在と列和が一定であるような位数 v の Hadmard 行列の存在は同値である（[3] P206）.

$v > 2k$ であるような対称デザインにおいて k が v に最も近いのは $v = 2k+1$ のもの，つまり Hadmard デザインであるがそれに次いで k が v に近いものが(*)型の対称デザインである。つまり次がなりたつ。

命題. 対称デザイン (v, k, λ) において $v > 2k+1$ とすると $v \geqq 2(k+\sqrt{n})$ （但し $n = k-\lambda$）であってここで等号がなりたてば $a = \sqrt{n}$ の(*)型デザインになる.

(*)型デザインにはいろいろ話題が多くすでに多くの人によ

りいろんな角度から研究されているようである．次にその二，三について解説する．

I．(*)型対称デザインの存在について

$a=2^m$の形のaに対しては常に存在することが知られている。最初に構成したのはP. K. Menon [4]のようである．この形のものはあとで述べるように多くの面白い性質をもっていてきわめて興味深いデザインである（なお同じaに対してデザインは一意とは限らない）．aが2^mでなくてもaが偶数の時は次のG. Szekeresの定理によりほとんど常に存在することが分る．

定理（G. Szekeres [9]）．位数$4t$のHadmard行列が存在すれば$a=2t$の(*)型デザインが存在する．

最後にaが奇数の時であるが存在が知られているのは$a=3, 5$の時だけである（[4], [8]）．$a=3$の時は二つ存在することが知られている。

II．正則な自己同型群をもつ(*)型対称デザインについて

よく知られているように正則な自己同型群H $(|H|=v)$を許す対称(v, k, λ)デザインの存在と群Hにk個の元よりな

る等差集合の存在することとは同値である．(I)で述べた(*)型デザインの例のうち $a=2^m$ 及び $a=3$ のもの（二つ）がこのような群等差集合より得られることが分っている．次の P.K．Menon の定理によりこのような例はこれらから無限シリーズで得られることが分る。

定理（P.K.Menon [5]）．S_i を群 H_i の等差集合とする（$i=1,2$）．$\bar{S}_i=H_i-S_i$，$S=(S_1,S_2)\cup(\bar{S}_1,\bar{S}_2)$ とおく。この時 S が直積の群 (H_1,H_2) の等差集合となるための必要十分条件は S_i が H_i の(*)型の等差集合であることである．この時 S も (H_1,H_2) の(*)型の等差集合となり S_i が $a=a_i$（$i=1,2$）の(*)型等差集合であれば S は $a=4a_1a_2$ の(*)型等差集合となる．

なおこの方面では「巡回群には(*)型の等差集合は存在しないであろう」という Ryser の予想がある（[10] 参照）．

Ⅲ．(*)型対称デザインの polarity について．

$a=2^m$ の(*)型対称デザインは次のような二種の polarity をもっている

(i)．absolute point を一つももたない．

(ii)．すべての点を absolute point にもつ．

（以後 上の(i)及び(ii)の polarity を A_0型 及び A_v型 と呼ぶ）.
まず次の A. Rudvalis の定理に注意する。

定理（A. Rudvalis [7]）.

(1). A_0型の polarity を許す対称デザイン (v, k, λ) の存在と $\lambda = \mu$ をみたす強正則グラフ (v, k, λ, μ) の存在は同値である.

(2). A_v型の polarity を許す対称デザイン (v, k, λ) の存在と $\lambda = \mu - 2$ をみたす強正則グラフ $(v, k-1, \lambda, \mu)$ の存在は同値である.

更にいずれの場合もグラフの自己同型群はデザインの自己同型群をひきおこす.

（強正則グラフについては[1]参照.）.

この定理により $a = 2^m$ の(*)型デザインには定理にいう二つの（異なる）強正則グラフが関連していることが分る. 実際このグラフは両方とも rank 3 群を自己同型群にもっている.（更にデザインの方は二重可移自己同型群を許している）.
$a = 3$ の時のデザインは二種類あるといったが一方は A_0型の polarity を他方は A_v型の polarity を許していて, いずれも rank 3 自己同型群をもっている. 他の(*)型デザインでどうなっているかは興味深い問題であるが何も分っていない.

なお A_0型及び A_v型の両方の polarity を許す対称デザイン(v, k, λ)のみたすべき parameter 上の制約が Rudvalis [7] によって与えられているがこれはまだまだ不完全のようで (*)型デザインはすべてこれをみたしている(Rudvalis は上のような二種の polarity をもつ対称デザインは $q=2^m$ の (*)型に限るだろうと予想している).

IV. System of linked symmetric designs について.

pairwise に incidence relation が定義されている集合 $\Omega_1, \Omega_2, \cdots, \Omega_f$ 達の集まり $\{\Omega_1, \Omega_2, \cdots, \Omega_f\}$ が次の(1), (2)をみたす時 これを system of linked symmetric designs という(P. J. Cameron [2] による).

(1) pair (Ω_i, Ω_j) は対称デザインをなす. $(1 \leqq i \neq j \leqq f)$

(2) triple $(\Omega_i, \Omega_j, \Omega_k)$ に対し i, j, k だけで定まる次のような整数 t_{ij}^k, u_{ij}^k が存在する:

$a \in \Omega_i$, $b \in \Omega_j$ に対して

$$\#\{ c \in \Omega_k \mid c - a,\ c - b \} = \begin{cases} t_{ij}^k, & a - b \text{ の時} \\ u_{ij}^k, & \text{その他} \end{cases}$$

(ここで $a - b$ は a と b が incident であることを示す).

更に上の t_{ij}^k, u_{ij}^k が i, j, k のとり方によらず一定であ

る時 homogeneous system ということにする．Wielandt 数が3以上であるような二重可移群の存在は system の存在を意味することに注意する．どのような対称デザインが system を構成しうるかはよく知られていない．筆者の知る限りでは system の存在が知られているのは $a=2^m$ の対称デザインのものだけである．

定理（[6]）．$\{\Omega_1, \Omega_2, \cdots, \Omega_f\}$ を各 (Ω_i, Ω_j) が (※) 型対称デザインであるような homogeneous system とする．この時 $f \leqq \frac{1}{2}v$（但し $v=|\Omega_i|$）でここで等号がなりたつための必要十分条件は pair $(\Omega_1, \Omega_2 \cup \Omega_3 \cup \cdots \cup \Omega_f)$ が 3-デザインをなすことである．

$a=2^m$ の時は上の定理で等号を達成する system の存在することが知られている．また $a=2$ の時はこの 3-デザインに 3重可移に働く（system の）自己同型群が存在している．

参考文献

[1] H. Enomoto, 数理科学 121 (1973).

[2] P. J. Cameron, Math. Z. 128, 1-14 (1972).

[3] M. Hall, Combinatorial Theory.

[4] P. K. Menon, Proc. Amer. Math. Soc. 11, 368-376. (1960)

[5] 〃 〃 13, 739-745. (1962)

[6] R. Noda. in preparation

[7]. A. Rudvalis, Math. Z. 120, 224 - 230 (1971)

[8] E. Spence, J. Combinatorial Theory 11, 299-302 (1971)

[9] G. Szekeres. J. Combinatorial Theory 6. 219-221 (1969)

[10] K. Yamamoto, 数理解析研究所講究録 178.