数理解析研究所講究録
211巻 1974年 13-24

Balanced design に関連した balanced array について

広大 理　白倉 暉弘

§1. 序

山本, 白倉, 栗田[6],[7] は分解能 $2l+1$ の fractional 2^m factorial design (2^m 一部実施計画) において, その design が balanced design であることは処理組合せの作る (0,1) 行列 $T(m\times N)$ が強さ $2l$, 大きさ N, 制約数 m, index set $\{\mu_0^{2l}, \mu_1^{2l}, \ldots, \mu_{2l}^{2l}\}$ の balanced array (B-array) であることと同値であることを示し, さらに最適性を議論する上に必要な balanced design の情報行列の固有多項式を求めた。

balanced design は fractional design の重要な subclass として Chakravarti[1] によって導入され, 分解能5 ($l=2$) の場合には Srivastava[2], Srivastava, Chopra[4][5] 等によって色々研究されている。ここでは前回[8] の続きといった感じで組合せに関係がある B-array について述べる。

[定義] (0,1) 行列 $T(m\times N)$ において, T の任意の t 個の

行からなる subarray $T_0\ (t\times N)$ の列に，weight $i\ (i=0,1,\ldots,t)$ のベクトルが各々 μ_i^t 回現われるとき，T は強さ t，大きさ N，制約数 m，index set $\{\mu_0^t,\mu_1^t,\ldots,\mu_t^t\}$ の balanced array という。

明らかに $N=\sum_{i=0}^{t}\binom{t}{i}\mu_i^t$ であり，特に $\mu_0^t=\mu_1^t=\cdots=\mu_t^t$ の時，T は orthogonal array と呼ばれ，又 T の列ベクトルの weight が一定かつ $\mu_t^t>0$ のとき T は t-design と呼ばれる。

記号として，T の列において，$x_i^{(m)}$ を weight $i\ (i=0,1,\ldots m)$ のベクトルの個数，又 $\tau^{(m)}(i_1,i_2,\ldots,i_k)$ を $i_1,i_2,\ldots,i_k$ 番目に 1，その他は 0 となるベクトルの個数とする。特に，$(0,0,\cdots,0)'$ ベクトルの個数を $\tau^{(m)}(\phi)$ とする。

§2．Srivastava による諸定理

便宜のために，前回[8] にも紹介した Srivastava [3] が与えた定理を簡単に説明する。

[定理 2.1]　強さ t，制約数 $m=t+1$，index set $\{\mu_0^t,\ldots,\mu_t^t\}$ の B-array T が存在するための必要十分条件は

$$(2.1)\quad \begin{aligned} d &\geq \psi_{11}=\max_{0\leq 2r-1\leq t}\left\{0,\ \sum_{g=0}^{2r-1}(-1)^{2r+g-1}\mu_g^t\right\}\\ d &\leq \psi_{12}=\min_{0\leq 2r\leq t}\left\{\sum_{g=0}^{2r}(-1)^{2r+g}\mu_g^t\right\}\end{aligned}$$

を満す整数 d が存在することである。もし (2.1) が満されるならば，構成として

$$(2.2)\qquad \begin{aligned} &\tau^{(t+1)}(i_1, i_2, \dots, i_k) = \sum_{g=1}^{k} (-1)^{k+g} \mu_{g-1}^t + (-1)^k d \;;\; 1 \le k \le t+1 \\ &\tau^{(t+1)}(\phi) = d \end{aligned}$$

とすればよい。

[定理2.2]　強さt，制約数$m = t+2$，index set $\{\mu_0^t, \dots, \mu_t^t\}$ の B-array T が存在するための必要十分条件は

$$(2.3)\qquad \begin{aligned} &\psi_{12} \ge d_1 \ge d_2 \ge \cdots \ge d_{t+2} \ge \psi_{11} \\ &d_0 \ge \psi_{21} = \max_{2 \le 2r \le t+2} \left\{ 0,\ \sum_{i=1}^{2r} d_i + \sum_{g=1}^{2r-1} (-1)^g \mu_{g-1}^t \right\} \\ &d_0 \le \psi_{22} = \min_{2 \le 2r \le t+1} \left\{ d_{t+2},\ \sum_{i=0}^{2r} d_{t+2-i} + \sum_{g=1}^{2r} (-1)^g (2r+1-g) \mu_{g-1}^t \right\} \end{aligned}$$

を満す整数$d_0, d_1, \dots, d_{t+2}$が存在することである。もし(2.3)が満されるならば，構成として

$$(2.4)\qquad \begin{aligned} &\tau^{(t+2)}(i_1, \dots, i_k) = \sum_{g=1}^{k-1} (-1)^{k-1+g} (k-g) \mu_{g-1}^t + (-1)^{k+1} \sum_{\alpha=1}^{k} d_{i_\alpha} + (-1)^k d_0 \;;\; 2 \le k \le t+2 \\ &\tau^{(t+2)}(i_1) = d_{i_1} - d_0 \\ &\tau^{(t+2)}(\phi) = d_0 \end{aligned}$$

とすればよい。

[定理2.3]　強さt，制約数m，index set $\{\mu_0^t, \dots, \mu_t^t\}$ の B-array T が存在するための必要条件は

$$(2.5)\qquad \sum_{g=0}^{m} \binom{g}{j} \binom{m-g}{t-j} x_g^{(m)} = \binom{m}{t} \binom{t}{j} \mu_j^t \;;\; j = 0, 1, \dots, t$$

§3. Simple balanced array

[定義]　制約数mの balanced array T において，$\tau^{(m)}(i_1, i_2, \dots, i_k)$ が1が現われる位置に関係なく，1が現われる個

数に関係するとき，Tは simple balanced array という。

balanced design に関連して B-array を考えるとき，強さ $2l$，index set $\{\mu_0^{2l},\dots,\mu_{2l}^{2l}\}$ をもつ simple B-array が存在するならば，同じ index set をもつ一般の B-array はかならずしも必要としない。そのため構造の簡単な simple B-array は非常に有用である。

定理2.1から明らかにつぎの補題をもつ

[補題3.1]　強さ t，制約数 $m=t+1$ である B-array はいつも simple B-array である。又その array は強さ $t+1$，index $\mu_k^{t+1}=\Sigma^{(t+1)}(i_1,i_2,\dots,i_k)$ $(k=0,1,\dots,t+1)$ の simple B-array でもある。

[定理3.1]　強さ t，制約数 m，index set $\{\mu_0^t,\dots,\mu_t^t\}$ の simple B-array T が存在するための必要十分条件は，$l=t,t+1,\dots,m-1$ に対して

$$
(3.1)\qquad
\begin{aligned}
d^{l+1} &\ge \psi_1^{(l)} = \max_{0\le 2r-1\le l}\left\{0,\ \sum_{g=0}^{2r-1}(-1)^{2r-1+g}\mu_g^l\right\}\\
d^{l+1} &\le \psi_2^{(l)} = \min_{0\le 2r\le l}\left\{\sum_{g=0}^{2r}(-1)^{2r+g}\mu_g^l\right\}
\end{aligned}
$$

を満す整数 $d^{t+1},d^{t+2},\dots,d^m$ が存在することである。ただし

$$
(3.2)\qquad
\begin{aligned}
\mu_0^{l+1} &= d^{l+1}\\
\mu_k^{l+1} &= \sum_{g=1}^{k}(-1)^{k+g}\mu_{g-1}^l+(-1)^k d^{l+1};\quad 1\le k\le l+1
\end{aligned}
$$

<u>証明</u>　T_l $(l=t,t+1,\dots,m-1)$ をTの l 個の行からなる sub-array とする。もしTが simple B-array ならば T_{l+1} は

同時に強さl, $l+1$ の simple B-array で，定理2.1, 補題3.1 より，それらの index set $\{\mu_0^l, \dots, \mu_l^l\}$, $\{\mu_0^{l+1}, \dots, \mu_{l+1}^{l+1}\}$ の間の関係は(3.2)で与えられる。よって(3.1)を満す整数$d^{t+1}, \dots, d^m$ を順次に求めることが出来る。逆に(3.1)を満す整数$d^{t+1}, \dots, d^m$ が存在するならば，その時明らかに定理2.1, 補題3.1より，順次に強さt, index set $\{\mu_0^t, \dots, \mu_t^t\}$ をもつ simple B-array $T_{t+1}, T_{t+2}, \dots, T_m$ を構成することが出来る。

[定理3.2]　強さt, 制約数 $m=t+2$, index set $\{\mu_0^t, \dots, \mu_t^t\}$ の B-array が non-simple B-array であるための必要条件は $1 \leq g \leq m-1$ となるすべてのgに対して

$$x_g^{(m)} \neq 0$$

となることである。

<u>証明</u>　$1 \leq g \leq m-1$ となるあるgに対して $x_g^{(m)} = 0$ とすると，定理2.2より，すべての $1 \leq i_1, \dots, i_g \leq m$ に対して

$$\tau^{(m)}(i_1, \dots, i_g) = 0$$

$$\therefore \sum_{\alpha=1}^{g} d_{i_\alpha} = \text{一定}$$

$$\therefore d_1 = d_2 = \cdots\cdots = d_m$$

故に，$\tau^{(m)}(i_1, \dots, i_k)$ はkのλに関係する。よって non-simple であることに反する。

例。つぎの array は $t=3$, $m=5$, index set $\{1, 2, 2, 1\}$ の non-simple B-array である。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} x_1^{(5)} = x_4^{(5)} = 1 \\ x_2^{(5)} = x_3^{(5)} = 6 \end{array}$$

§4. $t=6$, $m=8$ の balanced array について

この節では，$t=6$, $m=8$ についての B-array を具体的に構成するために B-array T の列ベクトルで $(0,0,\cdots,0)'$, $(1,1,\cdots,1)'$ を除いた array を考え，さらに分解能7の balanced fractional 2^8 factorial design に関連して，つぎの条件を満す array を考える。

(i) $\mu_3^6 \neq 0$

(ii) $91 \leq N < 128$

(iii) T の異なる3列ベクトルの個数が91以上

以下，簡単のために，$\mu_i^t = \mu_i$, $x_j^{(m)} = x_j$ とする。(2.5) 式より

$$(4.1)\quad \begin{cases} 7x_1 + x_2 = 28\mu_0 \\ 7x_1 + 4x_2 + x_3 = 56\mu_1 \\ 5x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 140\mu_2 \\ 5x_3 + 8x_4 + 5x_5 = 280\mu_3 \\ 2x_4 + 5x_5 + 5x_6 = 140\mu_4 \\ x_5 + 4x_6 + 7x_7 = 56\mu_5 \\ x_6 + 7x_7 = 28\mu_6 \end{cases}$$

これより

$$
(4.2)\quad
\begin{aligned}
\alpha_1+\alpha_7 &= 8(-\mu_3+\nu_2-\nu_1+\nu_0)\\
\alpha_2+\alpha_6 &= 28(2\mu_3-2\nu_2+2\nu_1-\nu_0)\\
\alpha_3+\alpha_5 &= 56(-3\mu_3+3\nu_2-2\nu_1+\nu_0)\\
\alpha_4 &= 35(4\mu_3-3\nu_2+2\nu_1-\nu_0)
\end{aligned}
$$

ただし, $\nu_0=\mu_0+\mu_6$, $\nu_1=\mu_1+\mu_5$, $\nu_2=\mu_2+\mu_4$

よって，つぎの定理をもつ

[定理4.1] index set $\{\mu_0,\mu_1,\ldots,\mu_6\}$ の B-array が存在するための必要条件は

$$
(4.3)\quad
\begin{aligned}
&(a)\quad -\mu_3+\nu_2-\nu_1+\nu_0 \ge 0\\
&(b)\quad 2\mu_3-2\nu_2+2\nu_1-\nu_0 \ge 0\\
&(c)\quad -3\mu_3+3\nu_2-2\nu_1+\nu_0 \ge 0\\
&(d)\quad 4\mu_3-3\nu_2+2\nu_1-\nu_0 \ge 0
\end{aligned}
$$

を満すことである。

[定理4.2] index set $\{\mu_0,\ldots,\mu_6\}$ の B-arrayが存在するための必要条件は, $7\le\alpha$, $0\le\beta\le 40$, $0\le\gamma\le 7$ に対して

$$
(4.4)\quad
\begin{aligned}
&\max\{(28-\alpha)\nu_2+(\alpha+7)\mu_3,\ 8\nu_1+35\mu_3,\ (2\beta-84)\nu_0+(56-\beta)\nu_1\}\\
&\le N \le \min\{28\nu_0+56\mu_3,\ (21-\gamma)\nu_1+(35+\gamma)\mu_3\}
\end{aligned}
$$

を満すことである。ただし $N=\nu_0+6\nu_1+15\nu_2+20\mu_3$

<u>証明</u> (4.3; b, c) より

$$\nu_0+15\nu_2 \ge 2\nu_1+15\mu_3$$

$$\therefore\quad N \ge 8\nu_1+35\mu_3$$

(4.3; a, b, c) より $\alpha \geq 7$ に付いて

$$6\nu_1+\nu_0 \geq (\alpha-13)\mu_3+(13-\alpha)\nu_2$$

$$\therefore \quad N \geq (28-\alpha)\nu_2+(\alpha+7)\mu_3$$

(4.3; a, c, d) より $0 \leq \beta \leq 40$ に付いて

$$20\mu_3+15\nu_2 \geq (50-\beta)\nu_1+(2\beta-85)\nu_0$$

$$\therefore \quad N \geq (2\beta-84)\nu_0+(56-\beta)\nu_1$$

(4.3; a, d) より

$$15\nu_2+6\nu_1 \leq 27\nu_0+36\mu_3$$

$$\therefore \quad N \leq 28\nu_0+56\mu_3$$

(4.3; a, b, d) より $0 \leq \gamma \leq 7$ に付いて

$$15\nu_2+\nu_0 \leq (15-\gamma)\nu_1+(15+\gamma)\mu_3$$

$$\therefore \quad N \leq (21-\gamma)\nu_1+(35+\gamma)\mu_3$$

終り

定理4.2より特に，$35\mu_3 \leq N$ よって条件(i), (ii)より

$$1 \leq \mu_3 \leq 3$$

(A) $\mu_3=1$ のとき

$$2 \leq \nu_2 \leq 5, \quad 4 \leq \nu_1 \leq 11, \text{ かつ}$$

$$3\nu_2-2\nu_1+\nu_0=4 \quad (i.e., \ \alpha_4=0, \ \alpha_3+\alpha_5=56)$$

でなければいけない。なぜならば，定理4.2より $\nu_2 \leq 5$, $4 \leq \nu_1 \leq 11$。(4.3; c, d) より $0 \leq 4-3\nu_2+2\nu_1-\nu_0 \leq 1$。$4-3\nu_2+2\nu_1-\nu_0=1$ のとき，(4.2) より $\alpha_4=35$, $\alpha_3+\alpha_5=0$，定理3.2よりそのような B-array は存在しない。よって

$3\nu_2-2\nu_1+\nu_0=4$ であり，(4.3；b) より $\nu_2\geq 2$ をえる。

結局 $\mu_3=1$ となる B-array は定理 3.2 よりすべて simple B-array である。又，$\nu_2=2$ は (4.2) より，$x_4=0, x_3+x_5=56, x_2+x_6=0$ となるため条件(iii)を満さない。

(B) $\mu_3=2$ のとき

定理 4.1，4.2 より

$$(4.6)\quad \begin{array}{l} 2\leq\nu_2\leq 4,\quad 1\leq\nu_1\leq 7 \quad かつ \\ 2\nu_2-4\leq 2\nu_1-\nu_0\leq 3\nu_2-6 \end{array}$$

(4.6) を満す (ν_2,ν_1,ν_0) を (4.2) に代入して調べると，$(\nu_2,\nu_1,\nu_0)=(4,4,3)$ 以外は，すべて simple B-array であることがわかる（それ以外は $x_g=0$ となる $g\ (1\leq g\leq 7)$ が存在）。又 $\nu_2=2$ は (4.2) より $x_4=70, x_3+x_5=0, x_2+x_6=0$ となるため条件(iii) を満さない。

(C) $\mu_3=3$ のとき

同様にして，

$$(4.7)\quad \begin{array}{l} 3\leq\nu_2\leq 4,\quad 0\leq\nu_1\leq 2 \quad かつ \\ 2\nu_2-6\leq 2\nu_1-\nu_0\leq 3\nu_2-9 \end{array}$$

(4.2) より (4.7) を満す B-array はすべて simple B-array でかつ条件(iii) を満す B-array は，ただ $(\nu_2,\nu_1,\nu_0)=(4,1,0)$ にかぎることがわかる。

以上よりつぎの定理をえる。

[定理4.3]　条件(i),(ii) を満す B-array は $(\mu_3, \nu_2, \nu_1, \nu_0) = (2, 4, 4, 3)$ をのぞいて，すべて simple B-array である。

$(\mu_3, \nu_2, \nu_1, \nu_0) = (2, 4, 4, 3)$ について定理2.2 より，つぎの index set をもつ non-simple B-array が，ただ一つ存在する。ここで $C(j; m)$ は weight j の異なる $(0, 1)$ ベクトルを $\binom{m}{j}$ 個すべて並べてできる $m \times \binom{m}{j}$ 行列である。

$N = 127$　$\{\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6\} = \{2, 2, 2, 2, 2, 2, 1\}$

$$T = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} 00\cdots0 & 11\cdots1 & 00\cdots0 & 11\cdots1 & 00\cdots0 & 11\cdots1 & 0 \\ \hline & & & & & & 1 \\ C(1;7) & C(1;7) & C(3;7) & C(3;7) & C(5;7) & C(5;7) & 1 \\ & & & & & & \vdots \\ & & & & & & 1 \end{array}\right]$$

条件(i),(ii),(iii) を満す B-array を (A),(B),(C) より求めた結果，つぎの index set に関する表をえる（ただし $\mu_2 \geq \mu_4$）。

N	μ_0	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6	N	μ_0	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6	N	μ_0	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6
92	3	4	3	1	0	0	0	100	2	2	2	1	1	3	3	108	4	3	2	1	1	3	3
	1	3	3	1	0	1	2		0	1	2	1	1	4	5		2	2	2	1	1	4	5
	2	2	2	1	1	2	1	106	3	3	2	2	1	0	0		0	1	2	1	1	5	7
	0	1	2	1	1	3	3		1	2	2	2	1	1	2	112	1	3	3	1	1	2	1
98	1	1	2	2	1	0	0	108	7	6	3	1	0	0	0	114	5	4	2	2	1	0	0
100	5	5	3	1	0	0	0		5	5	3	1	0	1	2		3	3	2	2	1	1	2
	3	4	3	1	0	1	2		3	4	3	1	0	2	4		1	2	2	2	1	2	4
	1	3	3	1	0	2	4		1	3	3	1	0	3	6	116	9	7	3	1	0	0	0
	4	3	2	1	1	2	1		6	4	2	1	1	2	1		7	6	3	1	0	1	2

N	μ_0	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6	N	μ_0	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6	N	μ_0	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6
116	5	5	3	1	0	2	4	120	4	5	2	1	2	1	0	124	10	6	2	1	1	2	1
	3	4	3	1	0	3	6		2	4	2	1	2	2	2		8	5	2	1	1	3	3
	1	3	3	1	0	4	8	122	7	5	2	2	1	0	0		6	4	2	1	1	4	5
	8	5	2	1	1	2	1		5	4	2	2	1	1	2		4	3	2	1	1	5	7
	6	4	2	1	1	3	3		3	3	2	2	1	2	4		2	2	2	1	1	6	9
	4	3	2	1	1	4	5		1	2	2	2	1	3	6		0	1	2	1	1	7	11
	2	2	2	1	1	5	7	124	11	8	3	1	0	0	0	126	2	4	3	2	1	0	0
	0	1	2	1	1	6	9		9	7	3	1	0	1	2		1	2	2	2	2	2	1
120	4	6	4	1	0	0	0		7	6	3	1	0	2	4		0	1	3	3	1	0	0
	2	5	4	1	0	1	2		5	5	3	1	0	3	6	127	2	2	2	2	2	2	1
	3	4	3	1	1	2	1		3	4	3	1	0	4	8								
	1	3	3	1	1	3	3		1	3	3	1	0	5	10								

References

[1] Chakravarti, I.M. (1956). Fractional replication in asymmetrical factorial designs and partially balanced arrays. Sankyā 17 143~164

[2] Srivastava, J.N. (1970). Optimal balanced 2^m fractional factorial designs. S.N. Roy Memorial Volume. Univ. of North Carolina and Indian Statistical Institute 689~706

[3] Srivastava, J.N. (1972). Some general existence condition for balanced array of strength t and

2 symbols. Jour. Comb. Th., 13 198~206

[4] Srivastava, J.N., and Chopra, D.V. (1971). Optimal balanced 2^m fractional factorial designs $m \leq 6$. Technometrics, Vol 13 No. 2 257~269

[5] Srivastava, J.N., and Chopra, D.V. (1971). On the characteristic roots of the information matrix of 2^m balanced factorial designs of resolution V, with applications. Ann. Math. Statist., 42 722-734

[6] Yamamoto, S., Shirakura, T., and Kuwada, M. (1973). Characteristic polynomials of the information matrices of balanced fractional 2^m factorial designs of higher (2l+1) resolution. Submitted to Ann. Statist.

[7] Yamamoto, S., Shirakura, T., and Kuwada, M. (1974). Balanced arrays of strength 2l and balanced fractional 2^m factorial designs. Submitted to Ann. Inst. Statist. Math.

[8] 白倉, 来田, 山本 (1973). Balanced 2^m Fractional Factorial Design をめぐって. 数理解析研究所講究録 178. 群論と組み合せ論 1~9