数理解析研究所講究録
212巻 1974年 45-54

Elementary dynamical system の abstract local dynamical system への extendability について

神戸大 理 浦 太郎

§1. 序

力学系の古典的な公理は，色々の面で強すぎるので，もっと微分方程式の研究にふさわしいものを導入することが，色々と試みられている。著者もこの意図をもって，微分方程式の基礎定理から再出発して，新しい公理系を導入することを考えた。かくて自励系方程式の解の存在性，加法性，連続性より，F-族と書く曲線群を導入し，それが$\mathbb{F}$-族と書く，non-extendability 条件をみたす曲線族を一意的に定めることを示した。([5],[6])。一方，これより遅れて，同じ立場から，O. Hájek は局所力学系という概念と，その germ といわれる概念を導入して，後者が前者を一意的に定めることを証明した([2],[3])。

F-族と germ，$\mathbb{F}$-族と局所力学系とは，本質的に同値であることが感知されていたが，これは[1]において厳密に

証明された。 Hájekの公理系の方が記述が楽であるから，今後はそれに従って説明していく。

局所力学系は，phase space の位相構造と，実数直線Rの topological abelian group の構造とを準機として定義される。 しかし，この系の構造をしらべる場合に，R の abelian group の構造から入ってき，phase space の位相には関係しない，いわば純代数的部分を切離して，しらべておくと便利なことが多い。 恰も topological group の研究に先立って，abstract group の基礎的な研究をしておくべきであるのと同様である。 Hájek は，この趣に基いて，abstract local dynamical system という概念を導入し，その構造をしらべることを考えた（[3]）。ついで，彼は局所力学系の germ に当るものを求めようとし，elementary dynamical system なる概念を導入したが，これは 目的の半分しか果たさなかった （[4]）。すなわち，「elementary dynamical system が定める abstract local dynamical system は高々一つしかない」ことはいえるが，「そのような系が少くとも一つあるかどうかは」，わからない。 わからないという意味は，この論文の一つの結果として知られるように，そのような abstract local dynamical system が一つもないような elementary dynamical system があるということである。 そこで，Hájek は「そのような abstract local dynamical system が少くとも一つ存在するために，elementary dynamical system がみたすべき条件如何？」という問題を提起した（[4]）。 本論文の目的はこの問題に完全な回答を与えることである。 その回答は本文で説明する "No-Intersection Property (Axiom)" と呼ばれるものであって，問題の条件として，必要十分条件でもある。 この意味で回答は完全である。

我々の問題を微分方程式論の言葉で表現すれば，微分方程式の局所的な解について，どんな性質が保証されれば，すべての解は，方程式の定義域の境界から境界に至るまで接続ができるか，ということである。 したがって本論文の目的は，その条件を，いわば代数的条件として求めることである。

なお，局所力学系は元来自励系方程式の抽象化であって，強制系方程式の研究には不向であり，強いて用いるためには，特殊な工夫をしなければならないが，ここで扱っているような問題に関するかぎり，強制系でも parametrized system を取扱えば十分であるので，我々の結果は強制系にも直接応用できる。

証明は一切省略するが，主定理の証明の段階が察知されるよう，Lemmas と Propositions の配置を考慮したつもりである。詳細な証明と，同じ主題のもっと広い category での取扱について，別の論文として，何かの雑誌に発表する予定である（[7]）.

§2. No-Intersection Axiom.

<u>定義</u> 1.　π が phase space X の上の D を定義域とする局所力学系であるとは，

X は位相空間であって，D は $D=\bigcup_{x\in X}\{x\}\times D_x$ の形に書ける $X\times R$ の部分であり，各 $x\in X$ に対して，D_x は，実数直線 R (standing notation) の 0 を含む開区間で，

(C0). D は $X\times R$ の中で open，$\pi\ :D\to X$ は連続写像，

(CI)　すべての $x\in X$ に対し　$\pi(x,0)=x$

(CII)　(x,t), $(x,t+s)$, $(\pi(x,t),s)\in D$ ならば，$\pi(\pi(x,t),s)=\pi(x,t+s)$

(CIII) (Non-Extendability). $D_x=(a_x,b_x)$ とおくとき a_x (b_x) が finite なら，$t\downarrow a_x$ ($t\uparrow b_x$) に対する $\pi(x,t)$ の cluster set は空

がみたされることをいう.

<u>定義</u> 2. μ が phase space X の上の $\mathfrak{D}$ を定義域とする continuous germ であるとは, 定義 1 において, π を μ, D を $\mathfrak{D}$ と読みかえ, (CI), (CII) と

(C0′) $\mathfrak{D}$ は $X \times R$ で $X \times \{0\}$ の近傍,
$\mu : \mathfrak{D} \to X$ は連続写像

がみたされることをいう。((CIII) は不必要。)

<u>定義</u> 3. π が phase set X の上の D を定義域とする abstract local dynamical system (abst system と略記) であるとは定義 1 において (CI) (CII) (= (AI), (AII)) と

(AII′) (Non-Extendability): $\forall (x, t) \in D$,

$$D_x = D_{\pi(x,t)} + t$$

がみたされることをいう。(この場合も D_x は 0 を含む開区間であるという仮定は踏襲する。ただし X は abstract set)。

<u>定義</u> 4、μ が phase set X の上の, $\mathfrak{D}$ を定義域とする elementary (dynamical) system であるとは, 定義 3 で π を μ に, D を $\mathfrak{D}$ に読みかえ, (AI), (AII) とがみたされることをいう。

命題. (CI), (CII), (CIII) と (AI), (AII), (AII′)

とは同値である。(ただし phase set が位相をもつ場合。)

<u>定義</u> 5. μ が phase set X の上の $\mathcal{D}$ を定義域とする abstract germ であるとは, μ がそのような elementary system であって, さらに次の公理をみたすことをいう。

(AIII) (No-Intersection). $(x_1, t), (x_2, t) \in \mathcal{D}$ で, $\mu(x_1, t) = \mu(x_2, t)$ ならば, $x_1 = x_2$ である。

<u>Proposition</u> 1. Abstract system は abst. germ である。

<u>Lemma</u> 1. μ を elementary system とする。$(x_1, t_1), (x_2, t_2) \in \mathcal{D}$ に対して

$$A = \{ s \in (\mathcal{D}_{x_1} - t_1) \cap (\mathcal{D}_{x_2} - t_2) \mid \mu(x_1, t_1 + s) = \mu(x_2, t_2 + s) \}$$

とおけば, A は $\mathbb{R}$ の中で open である。

Lemma 2. μ が abstract germ $\Longleftrightarrow$ Lemma 1 の集合 A はすべて closed である。

<u>Proposition</u> 2. μ が Hausdorff space X の上の elementary system で, すべての $x \in X$ に対し $\mu(x, \cdot) : \mathcal{D}_x \to X$ が連続ならば, Lemma 1 の集合 A は closed である。 したがって μ は abstract germ である。

<u>Proposition</u> 3. Continuous germ は abstract germ である。

<u>Example</u> 1. $R^2 \ni (\xi, \eta)$（位相なし）に対して

$$l_0 = \{(\xi, 0) \mid \xi \in R\}, \quad l_1 = \{(\xi, 1) \mid \xi \in R\}$$

とおき $l_0 \cup l_1$ の上で

$$(\xi_1, \eta_1) \sim (\xi_2, \eta_2) \overset{d}{\Longleftrightarrow} \xi_1 = \xi_2 > 0 \text{ または } (\xi_1, \eta_1) = (\xi_2, \eta_2)$$

と定義すれば $\sim$ は equivalence relation である。

$X = l_0 \cup l_1 / \sim$ とおき，$x = (\xi, \eta) \in X$ に対して

$$\mathcal{D}_x = \begin{cases} (-\infty, \infty) & \xi \leq 0 \\ (-\xi, \infty) & \xi > 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{D} = \bigcup_{x \in X} \{x\} \times \mathcal{D}_x$$

$$\mu((\xi, \eta), t) = (\xi + t, \eta), \quad ((\xi, \eta), t) \in \mathcal{D}$$

とすれば μ は X の上の elementary system であるが，abstract germ ではない。

§3. Main Theorem.

<u>Proposition</u> 4. 集合 X の上の abstract germs 全体の族を Φ とする。$\mu_1, \mu_2 \in \Phi$ に対し

$$\mu^1 \ll \mu^2 \overset{d}{\Longleftrightarrow} \mathcal{D}^1 \subset \mathcal{D}^2, \quad \mu_1 = \mu_2|_{\mathcal{D}^1}$$

とすれば，$\ll$ は Φ の上の partial order である。

<u>Lemma</u> 3. μ, μ^1, μ^2 を同じ集合 X の上のabst. germsとする。 $\mu \ll \mu^1$ かつ $\mu \ll \mu^2$ ならば、Φ の中に $\sup(\mu^1, \mu^2)$ がある。

<u>Lemma</u> 4. Φ^* を Φ の部分で $\ll$ によって directed なるものとすれば、Φ の中に $\sup \Phi^*$ がある。

<u>Proposition</u>. 5. μ^0 を一つの abst. germ とするとき $\mu^0 \ll \mu$ なる μ 全体の集合を Φ^0 とすれば Φ^* の中に $\sup \Phi^0$ がある。

<u>Lemma</u> 5. μ が abstract germ で abstract system でなければ $\mu \lneqq \mu^*$ なる abstract germ がある。

<u>Theorem</u> 1. μ を X の上の abst. germ とすると、X の上の abst system π で $\pi|_{\mathfrak{D}} = \mu$ なるものは、一つあって一つにかぎる。
(πを μ によって張られる abstract system と呼ぶ)。

<u>Theorem</u> 2. π を abst. germ μ によって張られる abst. system とする。 $x_0 \in X$ とすると、正負の index をもった $\mathfrak{D}$ 内の二つの chains $(x_k, \tau_k), (x_k, \sigma_k)$ $k \in \mathbb{Z}$ が存在して、

(1) $$\mu(x_{k-1}, \tau_{k-1}) = \mu(x_k, \sigma_k),$$

(2) 任意の $t \in D_x$ に対して, $k \in Z$ と $\tau \in \mathcal{D}_{x_k}$ が存在して

$$\pi(x_0, t) = \mu(x_k, \tau).$$

参考. π を continuous germ μ で張られる continuous system とする. $x_0 \in X$ とする。正負の整数を index とする $\mathcal{D}$ の中の chain

(x_k, τ_k) が存在して

(1) $\mu(x_k, \tau_k) = x_{k+1}$,

(2) 任意の $t \in D_{x_0}$ に対して, $k \in Z$ と $\tau \in \mathcal{D}_{x_k}$ が存在して

$$\pi(x_0, t) = \mu(x_k, \tau).$$

Example 2. $X = R$ とし, すべての $x \in R - \{0\}$ に対し $\mathcal{D}_x = \{t \mid |t| < \frac{1}{2}|x|\}$ とおき, さらに $\mathcal{D}_0 = (-1, 1)$ として $\mathcal{D} = \bigcup \{x\} \times \mathcal{D}_x$ とする. $\mu : \mathcal{D} \to X$ を $\mu(x, t) = x + t$ と定義すれば, μ は abstract germ である。μ の張る abst. system π は $\pi : X \times R \to X$, $\pi(x, t) = x + t$ で与えられる。定理 2 の chains はあるが, 参考で述べた sequence はない。

References

[1] Ahmad, S., On Ura's Axions and Local Dynamical Systems, Funkcial. Ekvac., 12 (1969), 181 - 191.

[2] Hájek, O., Structure of Dynamical Systems, Comment. Math. Univ. Carolinae, 6 (1965), 53 - 72.

[3] Hájek, O., Local Characterization of Local Semi-dynamical Systems, Math. Syst. Theory, 2 (1968), 17 - 25.

[4] Hájek, O., Dynamical Systems in the Plane, Academic Press, London and New York, 1968.

[5] 浦 太郎: 特性曲線の延長と安定の問題, 数学, 第9巻 (1958), 137 - 148, 218 - 235.

[6] Ura, T., Sur le courant extérieur à une région invariante; Prolongement d'une caractéristique et l'ordre de stabilité, Funkcial. Ekvac., 2 (1959), 143 - 200.

[7] Ura, T., On Local Determinacy of Abstract Local Dynamical Systems (in preparation).