数理解析研究所講究録
212巻 1974年 28-34

遅れ型微分方程式の解の振動について

茨城大学・教養部　小野瀬　宏
広島大学・理学部　草　野　尚

最近，関数微分方程式，殊に，遅れ型微分方程式（以下RDEという）の解の振動性に関する研究が一部の関心を呼んでいる。研究の主要な方向の一つは，既存の常微分方程式（以下ODEという）の振動理論とのアナロジーを追求することに向けられている。

本稿では，この方向の高階RDEに対する結果を筆者の結果を中心にして概説する。

1. 有界な解の振動

高階ODEの有界な解の振動に関しては，Kartsatosや小野瀬の結果が知られている。次の定理はこれをRDEに拡張したものである。

定理1.1. 次のRDEを考える：

(A) $$x^{(n)}(t)+p(t)f(x(g_0(t)),x'(g_1(t)),\cdots,x^{(n-1)}(g_{n-1}(t)))=0$$

$$p\in C(0,\infty),\quad p(t)\geqq 0;$$

$$g_i\in C(0,\infty),\quad g_i(t)\leqq t,\quad \lim_{t\to\infty} g_i(t)=\infty,\quad i=0,1,\cdots,n-1;$$

$$f\in C(R^n),\quad \mathrm{sgn}\, f(y_0,y_1,\cdots,y_{n-1})=\mathrm{sgn}\, y_0.$$

「nが偶数のとき(A)のすべての有界な解が振動する，nが奇数のとき(A)のすべての有界な解が振動するか，あるいは$t \to \infty$のとき単調に0に収束する」ための必要十分条件は

$$\int^{\infty} t^{n-1} p(t)\,dt = \infty$$

である。

この定理を証明するためには，次の事実を示せばよい。

定理1.2.「nが偶数のとき(A)の有界な非振動解が存在する，nが奇数のとき(A)の有界な非振動解で$\lim_{t \to \infty} x(t) = a \neq 0$なるものが存在する」ための必要十分条件は

$$\int^{\infty} t^{n-1} p(t)\,dt < \infty$$

である。

定理1.2の必要性の部分の証明は易しい。十分性の部分は，Schauder-Tychonoffの不動点定理を援用して，積分方程式

$$x(t) = a + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \int_t^{\infty} (s-t)^{n-1} p(s) f(x^{(i)}(g_i(s)))\,ds \qquad (a \neq 0)$$

がある区間$[T, \infty)$で連続かつ有界な解を持つことを示すことによって証明する。(詳細は[6]参照。)

上記の定理はもっと一般なRDE

$$x^{(n)}(t) + F(t, x(g_0(t)), x'(g_1(t)), \cdots, x^{(n-1)}(g_{n-1}(t))) = 0$$

にも拡張される。その際には，Wong，小野瀬によって導入された"strongly continuous"なる概念が有用である。([1]参照。)

2. すべての解の振動

高階非線型ODEのすべての解が振動するための判定条件がLičko-Švec, Kiguradze, Ryder-Wend, Kartsatos, 小野瀬らによって与えられている。先ずLičko-Švec, Kiguradzeの結果のRDEへの拡張から：

定理2.1. 次のRDEを考える：

$$\text{(B)}\qquad x^{(n)}(t) + p(t)\,|x(g(t))|^{\alpha}\,\mathrm{sgn}\,x(g(t)) = 0$$

$$p \in C(0,\infty),\quad p(t) \geqq 0;$$
$$g \in C(0,\infty),\quad g(t) \leqq t,\quad \lim_{t\to\infty} g(t) = \infty.$$

(i) $0<\alpha<1$ のとき，(B)の「すべての解が振動する」ための必要十分条件は

$$\text{(2.1)}\qquad \int^{\infty} [g(t)]^{\alpha(n-1)}\, p(t)\,dt = \infty,$$

(ii) $\alpha>1$ のとき，(B)の「すべての解が振動する」ための十分条件は

$$\text{(2.2)}\qquad \int^{\infty} [g(t)]^{n-1}\, p(t)\,dt = \infty \qquad (g'(t) \geqq 0).$$

$g(t)$ が $\liminf_{t\to\infty} \dfrac{g(t)}{t} = \text{const.} > 0$ をみたすならば，(2.2)はすべての解の振動の必要十分条件になる。($g'(t)\geqq 0$ を仮定しないでも。)

上の命題における「すべての解が振動する」とは，「n が偶数のとき(B)のすべての解が振動する，n が奇数のとき(B)のすべての解が振動するか，あるいは $t\to\infty$ のとき単調に

0に収束する」の略式である。

定理2.1の(i)は草野−小野瀬[4]によって証明された。(ii)の前半については草野−小野瀬[3], 後半については小野瀬[8]を参照のこと。

一般の$g(t)$の場合には，(2.2)は(B)の「すべての解の振動」のための必要条件にはならない事がSficas[原稿]によって示された。

次のRDEを考える:

(C)
$$x^{(n)}(t)+p(t)f(x(g(t)))=0$$
$$p\in C(0,\infty),\quad p(t)\geqq 0;$$
$$g\in C^1(0,\infty),\quad g(t)\leqq t,\quad g'(t)\geqq 0,\quad \lim_{t\to\infty} g(t)=\infty;$$
$$f\in C(R)\cap C^1(R-\{0\}),\ \mathrm{sgn} f(y)=\mathrm{sgn}\, y,\quad f'(y)\geqq 0,\quad y\neq 0.$$

定理2.2. 次の性質をもつ関数ϕが存在するとき，(C)の「すべての解は振動する」:

$$\phi\in C^1(0,\infty),\quad \phi(y)>0,\quad \phi'(y)\geqq 0;$$
$$\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{dy}{f(y)\,\phi(y^{\frac{1}{n-1}})}<\infty,\quad \int_{-\varepsilon}^{-\infty}\frac{dy}{f(y)\,\phi((-y)^{\frac{1}{n-1}})}<\infty,\quad \varepsilon>0;$$
$$\int^{\infty}\frac{[g(t)]^{n-1}p(t)}{\phi(g(t))}\,dt=\infty.$$

この定理はODEに対するKamenevの定理を拡張したものである。$\phi\equiv 1$としたものは，ODEに対するRyder-Wendの結

果の拡張を与え，$f(y)\equiv y$ としたものは ODE に対する Kiguradze の結果の拡張を与える。（証明は草野-小野瀬[5].）

例. $$x^{(4)}(t)+\frac{15}{16\,t^{\frac{15}{4}}\log(1+t^{\frac{1}{4}})}\,x(g(t))\log\left[1+|x(g(t))|\right]=0$$

$\liminf_{t\to\infty}\dfrac{g(t)}{t}=\mathrm{const.}>0$ ならばすべての解は振動する.

$g(t)=t^{\frac{1}{2}}$ のとき 非振動解 $x(t)=t^{\frac{1}{2}}$ が存在する.

一般な RDE (A) の「すべての解の振動」の判定基準を求めることは容易ではない。可能なのは，$f(y_0,y_1,\cdots,y_{n-1})$ が同次関数である場合：$f(\lambda y_0,\lambda y_1,\cdots,\lambda y_{n-1})=\lambda^{\alpha}f(y_0,y_1,\cdots,y_{n-1})$ か，(B)（あるいは(C)）との好都合な比較ができる場合：例えば $\liminf_{|y_0|\to\infty}\dfrac{|f(y_0,y_1,\cdots,y_{n-1})|}{|y_0|^{\alpha}}>0$，ぐらいであろうか。([1],[3].)

3. 強制振動

(C)に"外力項"をつけた RDE

(D) $$x^{(n)}(t)+p(t)f(x(g(t)))=q(t)$$

を考える。$q\in C(0,\infty)$ とする。（C）の「すべての解が振動する」場合，どのような $q(t)$ に対して (C) の振動性が保存されるか，即ち (D) の「すべての解が振動する」か，と言う問題は応用面からも興味のある問題である。

この種の問題を ODE に対して手がけたのは Teufel と Kartsatos である。Kartsatos の考え方，手法は RDE に対

しても通用する。

定理3.1. 定理2.2の仮定をおく。次の性質をみたす関数 $Q \in C^{n}(0,\infty)$ が存在するものとする：

(I) $Q^{(n)}(t) = q(t)$, $\lim_{t\to\infty} Q(t) = 0$; または

(II) $Q^{(n)}(t) = q(t)$, 定数 q_1, q_2 と列 $\lim_{m\to\infty} t'_m = \lim_{m\to\infty} t''_m = \infty$ かつ

あって, $Q(t'_m) = q_1$, $Q(t''_m) = q_2$, $q_1 \leqq Q(t) \leqq q_2$.

このとき, (I) ならば, (D) のすべての解は振動するか, あるいは, $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ である。(II) ならば, (D) のすべての解は n が偶数ならば振動, n が奇数ならば振動か, あるいは $\lim_{t\to\infty} [x(t) - Q(t)] = -q_1$, or $-q_2$ である。

証明は, $y(t) = x(t) - Q(t)$ とおいて (D) を (C) に似た方程式 $y^{(n)}(t) + p(t) f(y(g(t)) + Q(g(t))) = 0$ に変換し, この方程式の解を詳細に吟味して行く, と言う方式による。(草野－小野瀬 [5] 参照。)

Kartsatos の考え方を注目したのは Atkinson である。彼は, 最近の論文 "On second-order differential inequalities" の中で, Kartsatos のアイデアを生かして 2階の常微分方程式 (不等式)

$$x'' + H(t, x) \overset{(<)}{=} q(t)$$

の定性的研究に新しい知見を与えた。この Atkinson の結果の一部はさらに Kartsatos ("On n-th order differential inequalities") によって高階の常微分方程式 (不等式)

$$x^{(n)} + H(t, x) \overset{(<)}{=} q(t)$$

に拡張された。その結果の主なものは例論 RDE に対しても成立つ。その例を一つ:

定理 3.2. RDE

(*) $$x^{(n)}(t) + H(t, x(g(t))) = 0$$

(**) $$x^{(n)}(t) + H(t, x(g(t))) = q(t)$$

を考える。$H \in C((0,\infty) \times R)$, $xH(t,x) > 0$ $(x \neq 0)$, $H(t,x)$ は x に関して非減少, $g \in C(0,\infty)$, $g(t) \leqq t$, $\lim_{t\to\infty} g(t) = \infty$ とする。

$q(t)$ は定理 3.1 の条件 (I) または (II) をみたすものとする。

(*) の「すべての解が振動する」ならば, (**) の解について定理 3.1 の結論と同じものが成立する。

参考文献

1. 草野: Proc. Carathéodory Symposium (Athens, 1973) (to appear)
2. 草野－小野瀬: Hiroshima Math. J. 2(1972), 1－13.
3. 〃 〃 : Hiroshima Math. J. 2(1972), 263－270.
4. 〃 〃 : Proc. Amer. Math. Soc. 40(1973).
5. 〃 〃 : J. Differential Equations (to appear)
6. 〃 〃 : Bull. Fac. Sci. Ibaraki Univ. (to appear)
7. 〃 〃 : Hiroshima Math. J. 4(1974) (to appear)
8. 小野瀬: Hiroshima Math. J. 3(1973).