

概周期系における  
安定性について

東北大理 吉沢 太郎

周期系において、周期解の存在を論ずるにあたり、有界な解の存在や解の終局有界性が十分条件であるが、概周期系の概周期解の存在をいうためには、有界な解の存在や終局有界性だけでは不十分である。そのため有界な解の安定性や分離条件が附加条件になる。

有界な解が *totally stable* ならば概周期解が存在することから、加藤、吉沢はどのような条件のもとで、有界な解が一樣漸近安定ならば、それは *totally stable* になるかを考えた。ここでは、加藤の条件は実際には *integrally asymptotic stability* とあたることを述べ、これに関連して有界な解の一樣漸近安定との関係を考える。特に周期系においては、有界な解の一樣漸近安定が *Liapunov* 函数の存在により特徴づけられることを述べる。

概周期系を考えるまえに、一般な系の解の *total (integral)*

stability の定義とあてえる。微分方程式

$$(1) \quad x' = f(t, x), \quad f(t, 0) \equiv 0, \quad x, f \in \mathbb{R}^n,$$

$$(2) \quad x' = f(t, x) + p(t)$$

と考える。ここで  $S_c = \{x; |x| < c\}$  とし,  $f(t, x)$  は  $I \times S_c$ ,  $I = [0, \infty)$ , で連続,  $p(t)$  は  $I$  で連続とする。

定義 1. 任意の  $\varepsilon > 0$ , 任意の  $t_0 \geq 0$  そして任意の  $p(t)$  に対して  $\delta(\varepsilon) > 0$  が存在し,  $|y_0| < \delta(\varepsilon)$ ,  $|p(t)| < \delta(\varepsilon)$ ,  $t \geq t_0$  ( $\int_{t_0}^{\infty} |p(t)| dt < \delta(\varepsilon)$ ) ならば, すべての  $t \geq t_0$  に対し,  $|y(t, t_0, y_0)| < \varepsilon$  となるとき, (1) の零解は *totally (integrally) stable* である。ここで  $y(t, t_0, y_0)$  は (2) の  $(t_0, y_0)$  を通る解である。

定義 2.  $\delta_0 > 0$  が存在し, 任意の  $\varepsilon > 0$ ,  $t_0 \geq 0$ ,  $p(t)$  に対して  $\eta(\varepsilon) > 0$  と  $T(\varepsilon) > 0$  が存在して,  $|y_0| < \delta_0$ ,  $|p(t)| < \eta(\varepsilon)$ ,  $t \geq t_0$  ( $\int_{t_0}^{\infty} |p(t)| dt < \eta(\varepsilon)$ ) ならば, すべての  $t \geq t_0 + T(\varepsilon)$  に対し,  $|y(t, t_0, y_0)| < \varepsilon$  となるとき, (1) の零解は *totally (integrally) attracting* である。ここで  $y(t, t_0, y_0)$  は (2) の解である。

定義 3. (1) の零解は, それが *totally (integrally) stable* で, かつ *totally (integrally) attracting* であるとき, *totally (integrally) asymptotically stable* であるといわれる。

あきらかに, *totally (integrally) stable* であれば, 一樣安定で, *totally (integrally) asymptotically stable* であれば, 一樣漸近安定

10

である。

さて、概周期系

$$(3) \quad x' = f(t, x), \quad x, f \in R^n$$

を考える。ここで  $f(t, x)$  は  $R \times S_{B^*}$ ,  $S_{B^*} = \{x; |x| < B^*\}$ , において連続,  $x \in S_{B^*}$  に対して一様,  $t$  に関して概周期的とする。さらに (3) は  $I$  上で定義され,  $|f(t)| \leq B$ ,  $B < B^*$ ,  $t \geq 0$  であるような解  $\varphi(t)$  を持つと仮定する。  $f$  の hull を  $H(f)$  で表わす。

ある数列  $\{\tau_k\}$ ,  $\tau_k > 0$ , に対して  $k \rightarrow \infty$  とき,  $S_{B^*}$  の任意のコンパクト集合  $S$  に対し,  $f(t + \tau_k, x)$  は  $R \times S$  上で一様にある函数  $g(t, x)$  に収束し,  $I$  上の任意のコンパクト集合上で,  $\varphi(t + \tau_k)$  はある函数  $\psi(t)$  に一様収束するとき, この事実を  $(\psi, g) \in H(\varphi, f)$  で表わす。このとき明らかに  $g \in H(f)$  で  $\psi(t)$  は

$$(4) \quad x' = g(t, x)$$

の解で, すべての  $t \geq 0$  に対して  $|\psi(t)| \leq B$ 。

周期系

$$(5) \quad x' = f(t, x), \quad f(t + \omega, x) = f(t, x)$$

においては,  $\varphi(t)$  が一様安定であれば  $\psi(t)$  もそうであり,  $\varphi(t)$

が一様漸近安定であれば,  $\psi(t)$  もそうである。概周期系 (3) においては, もしすべての  $g \in H(f)$  に対して (4) の解が初期値問題に関して一意的であれば,  $\varphi(t)$  が一様安定であれば,  $\psi(t)$  もそうであり, 一様漸近安定についても同じである。しかも, これらの場合, 安定性の定義にあらわれる量  $\delta, \delta(\cdot), T(\cdot)$  は共通なものかえらばれる。

概周期系 (3) に対して, つきの定理は解  $\varphi(t)$  の一様漸近安定と *integrally asymptotic stability* とが同値である場合を示している。

定理 1. 概周期系 (3) に対して, すべての  $(\psi, g) \in H(\varphi, f)$  に対し,  $\psi$  は共通の  $(\delta(\cdot), \delta_0, T(\cdot))$  ともち一様漸近安定であると仮定する。すると  $\varphi(t)$  は *integrally asymptotically stable* である。このときはまた  $\varphi(t)$  は *totally asymptotically stable* である。

この定理の証明はつきの補題をつかうことにより行われる。

補題 1. すべての  $(\psi, g) \in H(\varphi, f)$  に対し,  $\psi$  は共通の  $\delta(\cdot)$  ともち一様安定であると仮定する。すると任意の  $\varepsilon > 0, T > 0$  に対して, 正の数  $\zeta_1(\varepsilon), \zeta_2(\varepsilon, T)$  が存在して, 任意の  $t_0 \geq 0$  に対して,  $|y(t_0) - \varphi(t_0)| < \zeta_1(\varepsilon), \int_{t_0}^{t_0+T} |p(t)| dt < \zeta_2(\varepsilon, T)$  ならば,  $[t_0, t_0+T]$  上で  $|y(t) - \varphi(t)| < \varepsilon$ 。ここで  $p(t)$  は  $I$  上で *locally integrable* で,  $y(t)$  は

$$(6) \quad y' = f(t, y) + p(t)$$

の解である。

補題 2. すべての  $(\psi, g) \in H(\varphi, f)$  に対して,  $\psi$  は共通の  $(\delta(\cdot), \delta_0, T(\cdot))$  をもち一様漸近安定であると仮定する。すると  $\rho_0$  が存在し, 任意の  $\varepsilon > 0, t_0 \geq 0$  に対し,  $\rho_3(\varepsilon)$  が存在して, もし  $|y(t_0) - \varphi(t_0)| < \rho_0$ ,  $\int_{t_0}^{t_0 + T(\frac{\varepsilon}{2})} |p(t)| dt < \rho_3(\varepsilon)$  ならば, (6) の解  $y(t)$  は  $[t_0, t_0 + T(\frac{\varepsilon}{2})]$  上で存在し, かつ

$$|y(t_0 + T(\frac{\varepsilon}{2})) - \varphi(t_0 + T(\frac{\varepsilon}{2}))| < \varepsilon.$$

補題 1 は,  $\rho_2(\varepsilon) = \frac{1}{2} \delta(\frac{\varepsilon}{2})$  とし, この  $\rho_2(\varepsilon)$  に対して補題 1 における  $\rho_2(\varepsilon, T)$  が存在しと仮定して矛盾を導くことにより証明される。補題 2 も同様の論法により証明される。すなわち,

$$\rho_0 = \min(\delta_0, \rho_1(\frac{B^* - B}{2}))$$

とし, 任意の  $t_0 \geq 0$  に対し,  $|\varphi(t_0) - y(t_0)| < \rho_0$  で

$$\int_{t_0}^{t_0 + T(\frac{\varepsilon}{2})} |p(t)| dt < \rho_3(\varepsilon), \quad \rho_3(\varepsilon) \leq \rho_2(\frac{B^* - B}{2}, T(\frac{\varepsilon}{2}))$$

ならば,  $|y(t_0 + T(\frac{\varepsilon}{2})) - \varphi(t_0 + T(\frac{\varepsilon}{2}))| < \varepsilon$  なるよう正の数  $\rho_3(\varepsilon)$  を見出すことが出来る。

定理 1 の証明の概略はつきのようなものである。  $\rho_1, \rho_2, \rho_0, \rho_3$  を

補題 1, 2 であたえられた数とし,

$$f(\varepsilon) = \min \{ \tau_1(\varepsilon), \tau_0 \},$$

$$\tau(\varepsilon) = \min \left\{ \tau_2\left(\frac{B^* - B}{2}, T\left(\frac{f(\varepsilon)}{2}\right)\right), \tau_2(\varepsilon, T\left(\frac{f(\varepsilon)}{2}\right)), \tau_3(f(\varepsilon)) \right\}$$

とおく。任意の  $t_0 \geq 0$  に対し, (6) の解  $y(t)$  は,  $|\varphi(t_0) - y(t_0)| < \tau_0$ ,  $\int_{t_0}^{\infty} |p(t)| dt < \tau(\varepsilon)$  ならば,  $t \geq t_0 + T\left(\frac{f(\varepsilon)}{2}\right)$  に対し  $|\varphi(t) - y(t)| < \varepsilon$  をみたすことを示す。  $\tau_0 \leq \tau_1\left(\frac{B^* - B}{2}\right)$ ,  $\tau(\varepsilon) \leq \tau_2\left(\frac{B^* - B}{2}, T\left(\frac{f(\varepsilon)}{2}\right)\right)$  であるから, 補題 1 により

$$|\varphi(t) - y(t)| < \frac{B^* - B}{2}, \quad t_0 \leq t \leq t_0 + T\left(\frac{f(\varepsilon)}{2}\right).$$

さらに補題 2 により,

$$|\varphi(t_0 + T\left(\frac{f(\varepsilon)}{2}\right)) - y(t_0 + T\left(\frac{f(\varepsilon)}{2}\right))| < f(\varepsilon).$$

区間  $t_0 + T\left(\frac{f(\varepsilon)}{2}\right) \leq t \leq t_0 + 2T\left(\frac{f(\varepsilon)}{2}\right)$  上で補題 1 を適用して,

$$|\varphi(t) - y(t)| < \varepsilon, \quad t_0 + T\left(\frac{f(\varepsilon)}{2}\right) \leq t \leq t_0 + 2T\left(\frac{f(\varepsilon)}{2}\right)$$

また補題 2 により,

$$|\varphi(t_0 + 2T\left(\frac{f(\varepsilon)}{2}\right)) - y(t_0 + 2T\left(\frac{f(\varepsilon)}{2}\right))| < f(\varepsilon).$$

これを繰り返すことにより,  $t \geq t_0 + T\left(\frac{f(\varepsilon)}{2}\right)$  に対し,  $|\varphi(t) - y(t)| < \varepsilon$  なることがわかる。

系 1 概周期系 (3) において, すべての  $g \in H(f)$  に対し, (4) の解は初期値に因し一意的であると仮定する。このとき,  $\varphi(t)$  が一様漸近安定ならば,  $\varphi(t)$  は *totally (integrally) asymptotically stable* である。すなわちこれらの安定性は同値である。

周期系 (5) においては,  $\varphi(t)$  が一様漸近安定ならば, 附加条件なしで,  $\psi(t)$  が共通の  $(\delta(\cdot), \delta_0, T(\cdot))$  と持ち一様漸近安定であるから, つぎの定理がえられる。

定理 2. 周期系 (5) は  $|\varphi(t)| \leq B, B < B^*, t \geq 0$  である解をもつとする。もし  $\varphi(t)$  が一様漸近安定ならば,  $\varphi(t)$  は *totally (integrally) asymptotically stable* である。すなわちこれらの安定性は同値である。

一般の系に対して, *integrally asymptotic stability* はある性質をもつ Liapunov function の存在により特性づけられるから, 周期系 (5) に対して, つぎの定理が成り立つ。

定理 3. 周期系 (5) において,  $\varphi(t)$  が一様漸近安定であるための必要十分条件は, ある  $\alpha > 0$  に対し,  $0 \leq t < \infty, |\varphi(t) - x| < \alpha$  で定義され, つぎの性質をもつ Liapunov function  $V(t, x)$  が存在することである。すなわち

(i)  $\alpha(|\varphi(t) - x|) \leq V(t, x) \leq |\varphi(t) - x|$ , ここで  $\alpha(\alpha)$  は連続, 正定値,

(ii)  $|V(t, x) - V(t, y)| \leq |x - y|$ ,

$$(iii) \quad \dot{V}_{(S)}(t, x) \leq -V(t, x).$$

そこで、一般の系 (1) を考える。  $0 < a < c$ ,  $S_a = \{x; |x| < a\}$  として、各  $t \in (0, \infty)$ ,  $x \in S_a$  に対し、 $A_a(t, x)$  につきの条件をみたす絶対連続な函数  $\varphi: I \rightarrow R^n$  の集合を表わす。すなわち

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(t) = x, \quad \sup_{s \in [0, t]} |\varphi(s)| \leq a.$$

Liapunov function  $V(t, x)$  をつきのように定義する。

$$V(t, x) = \begin{cases} \inf_{\varphi \in A_a(t, x)} \int_0^t e^{-\lambda(t-u)} |\varphi'(u) - f(u, \varphi(u))| du, & t > 0 \\ |x|, & t = 0 \end{cases}$$

ここで  $\lambda \geq 0$  は定数。この函数  $V(t, x)$  はつきの性質をもっている。

(I)  $\tau > 0$ ,  $\xi \in S_a$  に対し,  $x(0) = 0$ ,  $x(\tau) = \xi$ ,  $0 \leq t \leq \tau$  で  $|x(t)| \leq a$  である (1) の解が存在するための必要十分条件は  $V(\tau, \xi) = 0$ 。

(II) 任意の  $t \geq s > 0$ ,  $x, y \in S_a$  に対し

$$|V(s, x) - V(t, y)| \leq |x - y| + |s - t| M(t) + (1 - e^{-\lambda(t-s)}) a,$$

ここで,  $M(\tau) = \max \{ |f(t, x)|; 0 \leq t \leq \tau, |x| \leq a \}$ 。

$$(III) \quad V(t, x) \geq e^{-\lambda t} |x| - t M(t),$$

$$(IV) \quad 0 \leq t < \infty, |x| < a \text{ に対し,}$$



$$\dot{V}_{(1)}(t, x) \leq -\lambda V(t, x).$$

定理 4. もし (1) の零解が *integrally stable* ならば, ある  $a$ ,  $0 < a < c$  に対し,  $I \times S_a$  で定義されてつぎの条件をみたすような Liapunov function  $V(t, x)$  が存在する。すなわち,

$$(i) \quad b(|x|) \leq V(t, x) \leq |x|, \quad \text{ここで } b(r) \text{ は連続で正定値,}$$

$$(ii) \quad |V(t, x) - V(t, y)| \leq |x - y|,$$

$$(iii) \quad \dot{V}_{(1)}(t, x) \leq 0.$$

この場合は  $\lambda = 0$  として上述の Liapunov function  $V(t, x)$  を定義すれば, つぎの定理の証明におけると同様にして, この  $V(t, x)$  が条件をみたすことが示される。

定理 5. もし (1) の零解が右に一意的で, *integrally attracting* ならば, ある  $a$ ,  $0 < a < c$ , に対し,  $I \times S_a$  で定義されてつぎの条件をみたす Liapunov function  $V(t, x)$  が存在する。すなわち,

$$(i) \quad b(|x|) \leq V(t, x) \leq |x|, \quad \text{ここで } b(r) \text{ は連続で正定値,}$$

$$(ii) \quad |V(t, x) - V(t, y)| \leq |x - y|,$$

$$(iii) \quad \dot{V}_{(1)}(t, x) \leq -V(t, x).$$

証明. 定義 2 における  $\delta_0$  に対し,  $\delta_0^* < \delta_0$ ,  $a = \delta_0^*$  とする。

$\lambda = 1$  として上述の Liapunov function  $V(t, x)$  を定義すれば, この函数の性質として, 条件 (ii), (iii) および  $V(t, x) \leq |x|$  をみたすことは明らかで, 零解の一意的性により  $V(t, 0) = 0$  で

あるから、 $V(t, x)$  の正定値性を示せばよい。もしそうでない  
とすれば、ある  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < \delta_0^*$ , と  $\varepsilon \leq |x_k| < \delta_0^*$ ,  $t_k \rightarrow \infty$  ( $k \rightarrow \infty$ ),  
 $V(t_k, x_k) \rightarrow 0$  ( $k \rightarrow \infty$ ) とするような数列  $\{t_k\}$ ,  $\{x_k\}$  が存在する。

$T(\varepsilon)$ ,  $\gamma(\varepsilon)$  を定義 2 における数とする。  $t_k > T(\varepsilon) + 1$ ,  $V(t_k, x_k) < \gamma(\varepsilon)e^{-(T(\varepsilon)+1)}$   
と取る十分大きい  $k$  を考え、

$$\int_0^{t_k} e^{-(t_k-u)} |\varphi'_k(u) - f(u, \varphi_k(u))| du < \gamma(\varepsilon)e^{-(T(\varepsilon)+1)}$$

で ある  $\varphi_k \in A_a(t_k, x_k)$  をえらふ。  $t_0 = t_k - (T(\varepsilon) + 1)$  とおくと、

$$\int_{t_0}^{t_k} e^{-(t_k-u)} |\varphi'_k(u) - f(u, \varphi_k(u))| du < \gamma(\varepsilon)e^{-(T(\varepsilon)+1)}$$

$$e^{-(T(\varepsilon)+1)} \int_{t_0}^{t_k} |\varphi'_k(u) - f(u, \varphi_k(u))| du \leq \int_{t_0}^{t_k} e^{-(t_k-u)} |\varphi'_k(u) - f(u, \varphi_k(u))| du$$

で あるから、

$$\int_{t_0}^{t_k} |\varphi'_k(u) - f(u, \varphi_k(u))| du < \gamma(\varepsilon).$$

== で  $p(t) \in$

$$p(t) = \begin{cases} \varphi'_k(t) - f(t, \varphi_k(t)), & t \in [t_0, t_k] \\ 0, & t \in (t_k, \infty) \end{cases}$$

で定義すれば、 $\int_{t_0}^{\infty} |p(t)| dt < \gamma(\varepsilon)$  で  $\varphi_k(t)$  は  $x' = f(t, x) + p(t)$  の  $t_0 \leq$   
 $t \leq t_k$  上の解で、 $|\varphi_k(t_0)| < \delta_0$ 。しかるに  $|\varphi_k(t_k)| = |x_k| > \varepsilon$  で、

18

$t_R > t_0 + T(\varepsilon)$  であるから *integral attraction* の定義に矛盾する。したがって、ある正定値函数  $b(x)$  が存在し、 $b(|x|) \leq V(t, x)$  となる。

$p: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  と可測で、

$$\sup_{t \geq 0} \int_t^{t+1} |p(s)| ds < \infty$$

なる函数と、ノルム  $\|p\| = \sup_{t \geq 0} \int_t^{t+1} |p(s)| ds$  とし、このような函数の空間を  $B$  とする。すると (1) の零解が *integrally asymptotically stable* ならば、系 (1) は空間  $B$  の下でも *perturbation* 可能である。これは定理 5 における *Liapunov function* を用いることにより示される。