Title	誤り訂正セル空間とα次元符号化について (オートマトン理論と数理言語の研究)
Author(s)	小渕, 洋一; 西尾, 英之助
Citation	数理解析研究所講究録 (1974), 213: 49-63
Issue Date	1974-06
URL	http://hdl.handle.net/2433/105237
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
213巻 1974年 49-63

誤り訂正セル空間とd次元符号化について

京大 理学部 小渕 洋一
西尾 英之助

我々は先に，与えられたセル空間をシミュレートし，かつある種の条件を満たす誤りを訂正できるようなセル空間の設計法を示した。[1] 本報告では(1)の手法を誤り訂正多次元符号の問題として一般化して扱い，得られた結果を使って誤り訂正セル空間の新しい具体例が構成できることを示した。

I. はじめに

d次元整数格子点の集合Z^dの各点に有限集合Sの元を対応させたものをconfiguration（conf.と略す）と呼ぶ。conf. cはZ^dからSへの写像である。Z^dの二点 $x=(x_1, x_2, \cdots x_d)$, $y=(y_1, y_2, \cdots y_d)$間の距離 $|x-y|$ は$\sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots\cdots+(x_d-y_d)^2}$ で定義する。Z^dの部分集合Aが連結しているとは $\forall x, y \in A$ に対しAの点列$z_1, z_2, \cdots\cdots, z_r$があって $|z_i - z_{i+1}| = 1$ ($i=1, \cdots, r-1$), $z_1 = x$, $z_r = y$ となることである。

さてZ^d上の同値関係Rを考え，RによるZ^dの類別において各類が連結しているとする．以下このような同値関係のことを分割と呼び，分割Rによって得られる類別をR分割と呼ぶ．conf. cが分割Rとcompatibleであるとは$\forall x, y \in Z^d$に対し，$xRy \Rightarrow c(x)=c(y)$となることである．この時$c$は$R$に関して符号語になっているともいう．$R$に関する符号語$c$に対し，いくつかの点における値が$c$のそれと異なっているconf. c'はcのそれらの点にerrorが生起して得られると考える．任意にconf. c'が与えられた時，分割Rに関するc'のerror pointの集合$E_R(c')$とは，Rに関する符号語cについて$\{x \mid c'(x) \neq c(x)\}$の濃度が最小になる集合の一つである．$E_R(c')=\{x \mid c'(x) \neq c(x)\}$である時，$x \in E_R(c')$は$c(x)$-typeのerror pointであると言う．

一般に誤り訂正の問題を考える際には，誤りの生起する仕方にある種の条件を付けなければならない．例えば，ある固定された大きさの連結領域をZ^d内に任意にとった時，その中にerror pointは高々k個しかないとか，距離が1である任意の二点は同時にerrorとならない等である．このような条件を一般に誤り分離条件Kと呼び，以下Kは少なくとも先の例の後者の条件を含んでいると仮定する．なおKは一般にRによる分割の形とは独立に与えるものとする．

$\mathbb{Z}^d$上の分割系$\{R_1, R_2, \cdots, R_\ell\}$が与えられ，その内のどれかを使って符号化が行なわれているが，その分割がどれであるかは知らないとする．分離条件Kを満たすerrorが生起している任意のconf.が与えられた時，与えられた有限集合$D \subset \mathbb{Z}^d$の部分のみ観察することによって，D内の与えられた一点にerrorが生起しているか否か，errorがある時は正しく訂正することができるかどうかという問題を考える．Dは原点0を含むとし，0点のerrorを問題にする．conf. cは$\mathbb{Z}^d$をDに制限したものを考えておけば十分であり，以下$c|_D$のことを簡単のためcと書く．

定義1 （Dの0点の）訂正可能性

少なくとも2つの分割で条件Kを満たしている任意のconf. cを考える．このcに対してKを満たすすべての分割について，0点がすべて同じtypeのerror pointであるか，すべてerror pointでないかである時，Dの0点は$\{R_1, \cdots, R_\ell\}$に関して条件Kの下で訂正可能であるという．

2. 分割等に関する諸定義と基本的性質

定義2. $R(A)$

D上の分割Rに対し，$A \subset D$とするとき，$R(A)$はD上の分割で次の条件を満たすものである．

$$x\,R(A)\,y \Leftrightarrow \begin{cases} x\,R\,y & \text{if } x, y \notin A \\ x = y & \text{if } x \text{ or } y \in A. \end{cases}$$

<u>定義 3</u>　A_R

D 上の分割 R に対し，$A \subset D$ とするとき，A_R は D の被覆で次の条件を満たすものである．

$$x\,A_R\,y \Leftrightarrow \begin{cases} x\,R\,y,\ |x-y|=1 & \text{if } (x\in A, y\notin A) \text{ or } (y\in A, x\notin A) \\ x = y & \text{if } (x\in A, y\in A) \text{ or } (x\notin A, y\notin A). \end{cases}$$

明らかに，被覆 A_R の 1 つの類には D の元は高々 2 つしかない．

<u>定義 4</u>　分割と被覆の積

D 上の分割 R と被覆 C の積 $R\cdot C$ とは次の条件を満たす被覆である．

$$x\ R\cdot C\ y \Leftrightarrow x\,R\,y \text{ かつ } x\,C\,y.$$

<u>定義 5</u>　Error set の compatibility

R_i, R_j を D の分割，A, B を D の subsets とする．A が R_i の，B が R_j の error set として compatible である（記法 $(R_i\text{-}A, R_j\text{-}B)$ compatible）とは

$$(R_i(A) \cup R_j(B))\cdot A_{R_i} = 0$$
$$(R_i(A) \cup R_j(B))\cdot B_{R_j} = 0$$

0：単位分割

となることである．

この時，次の補題が成立する．

補題1

R_i分割でAが，R_j分割でBが各々error
$(R_i\text{-}A, R_j\text{-}B)$compatible$\Leftrightarrow$ points の集合（即ち，$A=E_{R_i}(c)$, $B=E_{R_j}(c)$
となるようなconf. cが存在する．

証明

$\Rightarrow$ある分割が与えられた時，その分割にcompatibleで，かつ異なる類の点には異なるSの元が割当られているようなconf.を標準的conf.と呼ぶ．$R_i(A)\cup R_j(B)$に関して標準的なconf. cが求めるものであることを示す．

まず，R_i分割においてAの点のみがerror pointsになっていることを言う．$\forall x, y\in D-A$については，$xR_iy\rightarrow xR_i(A)y\rightarrow x(R_i(A)\cup R_j(B))y$より$R_i$の同じ類に属している点には同じ元が割当られている．

$x\in A$, $y\in D-A$でxR_iyとする．R_iの分割が連結領域をつくること，及び分離条件Kより$|y-x|=1$としてよい．この時$xA_{R_i}y$である．仮定より$(R_i(A)\cup R_j(B))\cdot A_{R_i}=0$であるから，$x(R_i(A)\cup R_j(B))y$とはならない．故に$x$と$y$は異なる元が割当られている．$R_j$分割と$B$についても同様．

$\Leftarrow(R_i\text{-}A, R_j\text{-}B)$compatibleでないとする．この時，$(R_i(A)\cup R_j(B))\cdot A_{R_i}\neq 0$としてよい．従って被覆$(R_i(A)\cup R_j(B))\cdot A_{R_i}$

の類の中に2つの元を含むものがある. その類の2つの元を x, y ($x \neq y$) とすると $x(R_i(A) \cup R_j(B))y$, $x A_{R_i} y$ となる. $c(x) = c(y)$ とすると, $x A_{R_i} y$ より例えば $x \in A$, $y \notin A$, $x R_i y$ となり x が error point であることに矛盾する. $c(x) \neq c(y)$ とすると $x(R_i(A) \cup R_j(B))y$ と矛盾.

<u>定義 6.</u> $(R\ R')$ ring

D 上の2つの分割を R, R' とする. D 上の $(R\ R')$ ring とは, D の相異なる点列 $x_1, x_2, \cdots x_{2m}$ であって

$$x_{2i-1}\ R\ x_{2i},\quad x_{2i}\ R'\ x_{2i+1}\quad (i = 1, \cdots, m;\ 但し\ x_1 = x_{2m+1} = 0)$$

となるものである.

<u>3. 主定理</u>

<u>定理 1</u>

D の 0 点が $\{R_1, \cdots, R_l\}$ に関して条件 K の下で訂正可能となるための必要十分条件は, ${}^{\forall}R_i, R_j \in \{R_1, \cdots, R_l\}$ に対し, 条件 K を満たす D の subsets A, B ($0 \in A$ または $0 \in B$) で $(R_i - A, R_j - B)$ compatible となっているものについて, $(R_i(A')\ R_j(B'))$ ring が存在することである. 但し $A' = A - \{0\}$, $B' = B - \{0\}$ とする.

<u>証明</u>

十分: 2つ以上の分割で条件 K を満たす error を起し

ている conf. C を考える．Cについてその error points が条件Kを満たす任意の2つの分割R_i, R_j をとる．この時，

[1] 0点がR_iとR_jで異なる type の error point

[2] 0点がR_iで error point でなく，R_jで error point

とはならないことを示せばよい．

[1]が起っていると仮定する．分割R_i, R_jにおけるCの error points の集合を各々A, Bとする．補題1より(R_i-A, R_j-B) compatible であり，仮定から($R_i(A')$ $R_j(B')$) ring が存在する．それを $x_1, x_2, \cdots, x_{2m}$ ($x_1=0$) とすると，$0R_i(A')x_2$ で x_2はR_iで error point でないのでR_i分割で0点は$C(x_2)$type の error となる．同様に，$x_{2m}R_j(B')0$ で，x_{2m}はR_j分割で error point でないのでR_j分割で0点は$C(x_{2m})$type の error となる．一方 ring の存在より $C(x_2)=C(x_{2m})$ となり，0点が異なる type の error point であることに反する．

[2]が起っているとすると[1]の場合と同様に ring $x_1, x_2, \cdots, x_{2m}$ ($x_1=0$) が存在し，$0R_i(A)x_2$, $x_2R_j(B')x_3$, $\cdots\cdots$ $x_{2m-1}R_i(A)x_{2m}$ より $C(0)=C(x_2)=\cdots\cdots=C(x_{2m})$ となる．

一方 $x_{2m}R_j0$ であり，x_{2m}はR_jで error point でないから，0点もR_jで error point でなくなる．

必要：　$^\exists R_i$, $^\exists R_j$に対し，条件Kを満たすDの subsets A, Bで($0\in A$ または $0\in B$) (R_i-A, R_j-B) compatible になっ

ているものが存在し，$(R_i(A')\ R_j(B'))$ ringが存在しないとする．$R_i(A)\cup R_j(B)$ に関して標準的な conf. C を考える．

$0\in A$, $0\in B$ とすると 0 点は異なる typeの error となって訂正可能ではないことを示す．0 点が R_i, R_j において同じ typeの error になっているとすると $^{\exists}x$, $^{\exists}y$ に対して，$0\,R_i(A')\,x$, $y\,R_j(B')\,0$, $c(x)=c(y)$ となる．従って $x\,(R_i(A)\cup R_j(B))\,y$ となっている．故に $x\,R_j(B)\,x_3$, $x_3\,R_i(A)\,x_4$, $\cdots$, $x_{2l-1}\,R_i(A)\,y$ となる x_i $(i=3,\cdots,2l-1)$ がある．$0\in A$, $0\in B$ であるから x_i $(i=3,\cdots,2l-1)$ の中に 0 はなく，従って $0\,R_i(A')\,x$, $x\,R_j(B')\,x_3$, $x_3\,R_i(A')\,x_4$, $\cdots\cdots$, $x_{2l-1}\,R_i(A')\,y$, $y\,R_j(B')\,0$ となり $(R_i(A')\ R_j(B'))$ ringが存在することになって矛盾．

$0\in A$, $0\notin B$ または $0\notin A$, $0\in B$ となっていれば明らかに訂正可能でない．

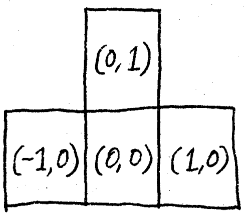
従っていずれの場合にも上記の仮定の下では訂正可能ではない．故に $(R_i(A')\ R_j(B'))$ ringが存在しなければならない．

4 具体例

ここでは，ある与えられた分割系に関して，ある D の 0 点が，与えられた K 条件の下で訂正可能となることを定理1を

使って示す.

$\{(0,0),(0,1),(-1,0),(1,0)\}$ の4つのセルから成る凸型を同じ向きに規則的に並べて二次元平面をしきつめることができる. Z^2 の0点に凸型の $(i,j)\in\{(0,0),(0,1),(-1,0),(1,0)\}$ がきている分割を (i,j) 分割と呼び, (i,j) 分割を与える同値関係を $R_{(i,j)}$ と書く.



定理2.

$D\subset Z^2$ を7行11列の長方形とし, その中心が0点であるとする. K条件として, 任意の2行3列の長方形の中に誤りは高々1つしかなく, Dの中に誤りが高々2つしかないとすれば, Dの0点は $\{R_{(0,0)}, R_{(0,1)}, R_{(-1,0)}, R_{(1,0)}\}$ に関し条件Kの下で訂正可能である.

証明

定理1.において一般性を失なうことなく $0\in B$ として考えてよい。また ring は $A'=A-\{0\}$ について考えるのだから $0\notin A$ と考えてよい.

I. (0,0)分割と(0,1)分割

(1) $x_{00}-x_{10}-x_{20}-x_{1-1}$

(2) $x_{00}-x_{-10}-x_{-20}-x_{-1-1}$

この2つの ring の存在より, Aとして考える必要があるのは i) $\{(2,0),(-2,0)\}$ ii) $\{(2,0),(-1,0)\}$ iii) $\{(2,0),(-1,-1)\}$

iv) $\{(-2,0),(1,0)\}$ v) $\{(-2,0),(1,-1)\}$ のみである.

(3) $x_{00}-x_{10}-x_{21}-x_{31}-x_{41}-x_{40}-x_{3-1}-x_{2-1}-x_{1-2}-x_{01}$

(4) $x_{00}-x_{-10}-x_{-21}-x_{-31}-x_{-41}-x_{40}-x_{-3-1}-x_{-2-1}-x_{1-2}-x_{01}$

(5) $x_{00}-x_{01}-x_{02}-x_{12}-x_{22}-x_{21}-x_{20}-x_{1-1}$

(6) $x_{00}-x_{01}-x_{02}-x_{-12}-x_{-22}-x_{-21}-x_{-20}-x_{-1-1}$

この(3)~(6)のring 4本の中で上の5つの場合いずれも2本のringが残り, しかもB'の一点によってこれらの2本のringを切ることはできない. (各場合の残るringは次の通り: i) (3), (4), ii) (3), (6), iii) (3), (4), iv) (4), (5), v) (3), (4))

II (0, 0)分割と(1, 0)分割　((0, 0)分割と(-1, 0)分割: y軸対称)

(1) $x_{00}-x_{-10}$

このringの存在より, (-1, 0)がAに含まれないと $(R_{(0,0)}(A')$ $R_{(1,0)}(B'))$ ringが存在することになる. 従って以下 $(-1,0)\in A$ として考える.

(2) $x_{00}-x_{01}-x_{12}-x_{-12}-x_{-22}-x_{-11}$

(3) $x_{00}-x_{10}-x_{0-1}-x_{0-2}-x_{-1-1}-x_{-20}$

(4) $x_{00}-x_{01}-x_{11}-x_{31}-x_{20}-x_{1-1}-x_{0-1}-x_{-1-2}-x_{-1-1}-x_{-20}$

(5) $x_{00}-x_{10}-x_{2-1}-x_{20}-x_{31}-x_{21}-x_{12}-x_{02}-x_{-22}-x_{-11}$

(2)~(5)の4本のringについてこれらをすべて切断する可能性を検討する. まず, 一点を切断することによって, 高々2本のringしか切断できないことが直ちにわかる. 一方

K条件より，２本の ring を切断する点の中で B' としてとり得るのは $(3,1)$，$(1,2)$，または $(-2,2)$ の３点のみである．

$(3,1)\in B'$ とすると(2)，(3)の ring が残りこれらを一点で切断できない．$(1,2)\in B'$（または $(-2,2)\in B'$）とすると(3)，(4)の ring が残りこれらを一点で切るには $(0,-1)$，$(-1,-1)$ または $(-2,0)$ を A に入れなければならない．ところが $(-1,0)\in A$ であるから，K条件よりこれらの点はいずれも A に入り得ない．

Ⅲ $(0,1)$分割と$(1,0)$分割　（$(0,1)$分割と$(-1,0)$分割：y軸対称）

(1) $x_{00}-x_{1-1}-x_{10}-x_{21}-x_{11}-x_{02}-x_{-12}-x_{-32}-x_{-21}-x_{-10}$

(2) $x_{00}-x_{-1-1}-x_{-1-2}-x_{-21}-x_{-30}-x_{-20}$

(3) $x_{00}-x_{0-1}-x_{10}-x_{20}-x_{31}-x_{42}-x_{32}-x_{12}-x_{01}-x_{-11}$

(4) $x_{00}-x_{-1-1}-x_{-2-2}-x_{-2-1}-x_{-30}-x_{-20}$

(5) $x_{00}-x_{1-1}-x_{2-1}-x_{3-2}-x_{3-1}-x_{40}-x_{31}-x_{42}-x_{22}-x_{12}-x_{11}-x_{02}-$
$x_{-22}-x_{32}-x_{-41}-x_{-31}-x_{21}-x_{-10}$

(6) $x_{00}-x_{0-1}-x_{2-1}-x_{2-2}-x_{3-1}-x_{40}-x_{30}-x_{21}-x_{01}-x_{-11}$

(7) $x_{00}-x_{-1-1}-x_{-1-2}-x_{-2-1}-x_{-3-1}-x_{-40}-x_{-51}-x_{-41}-x_{-21}-x_{-10}$

(8) $x_{00}-x_{-1-1}-x_{-2-2}-x_{-3-2}-x_{-3-3}-x_{-4-2}-x_{-51}-x_{-40}-x_{-51}-x_{-42}-x_{-53}-x_{-43}-$
$x_{-23}-x_{-12}-x_{02}-x_{-11}$

(9) $x_{00}-x_{1-1}-x_{10}-x_{21}-x_{12}-x_{23}-x_{13}-x_{-13}-x_{-22}-x_{-32}-x_{-21}-x_{-10}$

(10) $x_{00}-x_{0-1}-x_{2-1}-x_{1-2}-x_{0-3}-x_{0-2}-x_{-2-2}-x_{-3-2}-x_{-4-3}-x_{-4-2}-x_{-5-1}-x_{-4-1}-$

$x_{-30}-x_{-20}$

上記10本のringを考える．一点を切ることによって高々4本のringしか切れないので，少なくとも一点は4本のringを切るものでなければならない．4本のringを切るのは(−2, 1), (−1, 0), (−1, −1)の3点のみであるが，K条件よりこれらはいずれもB′に入り得ないのでAに属さねばならない。

1) $(-1,0)\in A$ の場合

この時(0, 1)分割と(1, 0)分割の積において(−2, 0)と(−1, 0)は同じ類にあるため(−2, 0)もAまたはBに入らねばならないがこれはK条件より許されない。

2) $(-1,-1)\in A$ の場合

この時残るのは(1), (3), (5), (6), (9), (10)の6本で，それらは一点を切ることによって高々3本しか切断できないから，残りの2点は少なくとも3本のringを切断する点から選ばねばならない．(即ち，(2, 1), (2, −1), (1, 2), (1, 0), (1, −1), (0, −1), (−1, 0), (−2, 1), (−3, 2)のうちから。)

- まず，(1, −1), (−1, 0), (1, 0), (0, −1)はK条件よりAにもBにも入り得ない．
- (1, 2)がとられると残るのは(1), (6), (10)の3本，(2, 1)がとられると(3), (5), (10)の3本が残るが，いずれの場合も

あと一点によって3本のringをすべて切断することはできない。

- (−2, 1)または(−3, 2)のいずれか一点がとられると残るのは(3), (6), (10)の3本. これらを同時に切るのは(0, −1)のみであるが, K条件より(0, −1)はAにもBにも入り得ない。
- (2, −1)がとられると残りは(1), (3), (9). これら3本をすべて切るのは(1, 0)のみであるが, これもK条件から許されない。

3) (−2, 1)∈Aの場合

この時残るのは(2), (3), (4), (6), (8), (10)の6本でそれらは一点によって高々3本しか切断できない. 3本を切る点は(−1, 1), (−1, −1), (−3, 0), (−2, 0), (0, −1), (−2, −2)であるが, K条件より(−1, 1), (−2, 0)は選び得ない.

- (−1, −1)∈Aとすると残りの3本((3), (6), (10))を切るのは(0, −1)のみであるがK条件より(0, −1)∈Bとはなれない.
- (−3, 0)∈Bとすると残りの3本((3), (6), (8))を切るのは(−1, 1)のみであるがK条件より(−1, 1)∈Aとはなれない.
- (0, −1)∈Aとすると残りの3本((2), (4), (8))を切るのは(−1, −1)のみであるが, (−1, −1)∈Bとはなれない.
- (−2, −2)を選ぶと残りの3本((2), (3), (6))は一点で切れない.

Ⅳ (1,0)分割と(−1,0)分割

(1) $x_{00}-x_{10}-x_{0-1}-x_{-10}$

(2) $x_{00}-x_{11}-x_{01}-x_{-11}$

この2本の ring とK条件より，これらの ring を切るためにはAの点として(0,−1)をとり，他の一点として(1,1), (0,1), (−1,1)のいずれかをとらねばならない．(これらの点はBの点ではあり得ない.)

(3) $x_{00}-x_{20}-x_{30}-x_{2-1}-x_{1-1}-x_{0-2}-x_{-1-1}-x_{-10}$

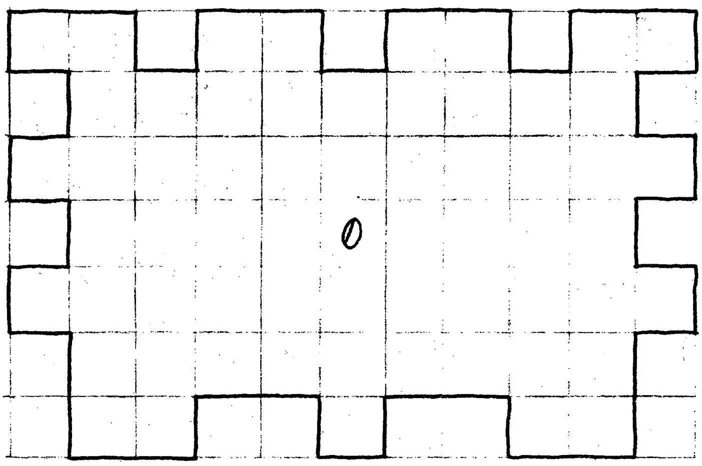
(4) $x_{00}-x_{20}-x_{31}-x_{21}-x_{12}-x_{02}-x_{12}-x_{-21}-x_{-31}-x_{-20}$

さらに(3), (4) 2本の ring をB'の一点で切るためには(2,0)で切るほかないが，K条件より(2,0)はB'となり得ない．

(証明終)

<u>系 2.1</u>

定理2のDは下図のような62個のセルとして十分である．



補題 2.

定理 2 において，D をいくら大きくとってもK条件をゆるやかにはできない。(2行3列の長方形の中に誤りが高々1つしかないという部分)

証明

$c(x_{00}) = c(x_{10}) = c(x_{0-1}) = c(x_{1-1}) = 1$，その他のすべてのセルに 0 が割当てられている conf. c を考えると (0,1) 分割で (-1,-1) と (1,0) が誤り，(1,0) 分割で 0 点と (2,-1) が誤りとなる。

文献

(1) 西尾，小渕「Cellular Automaton における誤り検出および誤り訂正の問題」信学会オートマトンと言語研資料 AL73-48 (1973-10)