

振動柱による二次流

阪府大 工 宮城敏夫

§ 1. 一般論

無限に広がった静止している非圧縮、粘性流体の中で、調和振動をしている二次元物体を考える。振動は x 軸に平行で

$$x = a \sin \omega t$$

と書ける。振幅 a は極めて小さく、振動数 ω は極めて大きいものとする。速度は $\dot{x} = a\omega \cos \omega t$ である。

Navier-Stokes の方程式から圧力項を消去し、流れの函数 ψ を導入し、物体の代表長 L 、時間 ω^{-1} 、速度 $a\omega$ を用いて無次元化すれば、

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi - \epsilon \frac{\partial(\psi, \Delta \psi)}{\partial(x, y)} = \frac{1}{M^2} \Delta^2 \psi \quad (1)$$

となる。但し $\epsilon \equiv a/L \ll 1$, $(\sqrt{\nu}/L)^2 = 1/M^2 \ll 1$ である。後に分る様に、 $1/M$ は境界層の厚さに関係している。

座標系を物体に固定すれば、境界条件は

$$\psi = \partial \psi / \partial y = 0 \quad ; \quad \text{物体表面} \quad (2)$$

$$\psi \sim y e^{it} \quad ; \quad \text{無限遠} \quad | \quad (2)$$

と書ける。但し、複素表示は実部を考えている。尚この様な加速度を有する問題でも、流体が非圧縮で、運動が並進であれば、方程式は不変であることが分っている。¹⁾

$\epsilon \ll 1$ の場合を考えるので、 ψ を

$$\psi = \psi_0 + \epsilon \psi_1 + \epsilon^2 \psi_2 + \dots \quad (3)$$

の様に展開すれば、(1) は

$$O(\epsilon^0) : \quad \frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi_0 = \frac{1}{M^2} \Delta^2 \psi_0 \quad (4)$$

$$O(\epsilon) : \quad \frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi_1 - \frac{1}{M^2} \Delta^2 \psi_1 = \frac{\partial(\psi_0, \Delta \psi_0)}{\partial(x, y)} \quad (5)$$

となる。オ一近似の方程式は線型で、解には $\cos \omega t$ に比例する形が予想される。オ二近似ではその非線型性から $\cos^2 \omega t = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\omega t)$ となり、時間項の他に、定常項が生ずる。これがこゝでの主題の Steady Streaming である。

(4) はこのままでは解けないので、 $M \gg 1$ として展開する。

$$\psi_0 = \psi_{00} + \frac{1}{M} \psi_{01} + \dots$$

として、(4) に代入すると

$$O(\epsilon^0), O(1) \quad \frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi_{00} = 0 \quad (6)$$

$$O(\epsilon^0), O\left(\frac{1}{M}\right) \quad \frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi_{01} = 0 \quad (7)$$

(6) は明らかに potential 流なる故, 物体表面の境界条件を
 定し得ないので, 物体表面に生ずる振動境界層 (厚さ $1/M$)
 で調節する。したがって, ψ_{00} としては粘着条件をゆるめて

$$\psi_{00} = \Psi(x) e^{it}.$$

ただし, $\Psi(x)$ は柱を迂する potential 流の流れ函数で, 無限
 遠の一樣流は 1 である。

物体表面に極めて近い所では, 物体に沿って s , n は
 垂直に n を取る。すると ψ_{00} は

$$\psi_{00} \sim n \nabla(s) e^{it}, \quad n \rightarrow 0$$

と書ける。ただし, $\nabla(s)$ は potential 流の物体表面の速度分
 布である。境界層内では, その解を X で書くことにして

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta X_{00} = \frac{1}{M^2} \Delta^2 X_{00}$$

は

$$\frac{\partial^3}{\partial t \partial n^2} X_{00} = \frac{1}{M^2} \frac{\partial^4}{\partial n^4} X_{00}$$

となるので, $\eta = \frac{M}{\sqrt{2}} n$ (8)

の様には, 例の $20 < n$ の方向に拡大すれば

$$\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - 2 \frac{\partial}{\partial t} \right) X_{00} = 0$$

境界条件 $\eta = 0: X_{00} = \partial X_{00} / \partial \eta = 0$
 $\eta = \infty: X_{00} = n \nabla(s) e^{it}$ (9)

であり, (9) の解は次の様にならる。

$$\chi_{00} = \frac{\sqrt{2}}{M} V(s) \left\{ \eta - \frac{1-i}{2} (1 - e^{-(1+i)\eta}) \right\} e^{it} \quad (10)$$

χ -項は当然 ψ_{00} に対立してゐるが、 χ -項は $1/M$ を含み、これは ψ_{01} に対立するが、外部では $\Delta\psi_{0i} = 0$ が成立し明らかに振動境界層による非粘性補正である。ただし、これは振動項であるので、ここではこれ以上問題にしない。

次に (5) 式に進み、先づ境界層の方から解く。ie.

$$\frac{\partial^3 \chi_{10}}{\partial t \partial n^2} - \frac{1}{M^2} \frac{\partial^4 \chi_{10}}{\partial n^4} = \frac{\partial (\chi_{00}, \partial^2 \chi_{00} / \partial n^2)}{\partial (s, n)} \quad (11)$$

前と同様に (8) の η を用い、

$$\eta = 0 : \text{粘着} \quad \eta = \infty : \text{速度有限}$$

という条件の下で (11) を解けば、次の様になる。

$$\chi_{10} = T e^{2it} + S \quad (12)$$

$$T = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{M} \frac{dV^2}{ds} \left\{ -\frac{1+i}{4\sqrt{2}} + \frac{i\eta}{2} e^{-(1+i)\eta} + \frac{1+i}{4\sqrt{2}} e^{-\sqrt{2}(1+i)\eta} \right\}$$

$$S = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{M} \frac{dV^2}{ds} \left\{ -\frac{3}{4}\eta + \frac{13}{8} - e^{-\eta} \left(\frac{1}{2}\eta \Delta\eta + \Delta\eta + \frac{3}{2}\omega\eta \right) - \frac{1}{8} e^{-2\eta} \right\}$$

$$\eta \rightarrow \infty \text{ の時} \quad \chi_{10} \rightarrow -\frac{3}{8} \frac{dV^2}{ds} \cdot n + O\left(\frac{1}{M}\right) \quad (13)$$

と有り境界層の外側は steady streaming が現われる。

以上の導出は Riley²⁾ によるものだが、(13) 位の結果は Schlichting³⁾, Stuart⁴⁾, Batchelor⁵⁾ も与えてゐる。

さらに, Riley²⁾ の線に沿って話を進める。境界層の外縁に誘起された速度(定常)を支配する方程式の問題である。

というのは振動項 T は $\eta \rightarrow 0$ の時 $1/M$ の程度であるので、今考えている order T は零であるとしてよい。故に (5) は

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi_{10} - \frac{1}{M^2} \Delta \psi_{10} = \frac{\partial(\psi_{00}, \Delta \psi_{00})}{\partial(x, y)}$$

となるが, $(1/M)^0$ の order T は $\Delta \psi_{00} = 0$ のために

$$\Delta \psi_{10}^{(u)} = 0$$

ie, ψ_{10} の unsteady part $\psi_{10}^{(u)} = 0$ なる解しかない。さて,

(1) に戻って ψ をすべて ϵ 展開し, $\Delta \psi_0 = 0$ を用いると

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta(\psi_0 + \epsilon \psi_2 + \dots) - \epsilon \frac{\partial(\psi_0 + \epsilon \psi_1 + \dots, \Delta \psi_0 + \epsilon \Delta \psi_2 + \dots)}{\partial(x, y)} = \frac{1}{M^2} \Delta^2(\psi_0 + \epsilon \psi_2 + \dots)$$

$$\Rightarrow \psi_1 \doteq \psi_{10} = \psi_{10}^{(s)}$$

となるのでこれを上式に代入して書き直せば

$$\Delta^2 \psi_{10}^{(s)} = -\epsilon M^2 \left[\frac{\partial(\psi_0, \Delta \psi_{10}^{(s)})}{\partial(x, y)} + \epsilon \frac{\partial(\psi_0, \Delta \psi_2)}{\partial(x, y)} + \epsilon \frac{\partial(\psi_{10}^{(s)}, \Delta \psi_{10}^{(s)})}{\partial(x, y)} + O(\epsilon^2) \right]$$

となるが、実は ψ_0 は振動項を含む故に [] 内の一項は非定常

であり、 ψ_2 項は $\Delta \psi_2 = \phi_{2s}(x) + \phi_{2t}(x)$ としてある。よって

Riley²⁾ により示されたように $\psi_0 \sim \cos t$ を与えれば、やはり非定常となるので上式は $\psi_{10}^{(s)}$ を決定する式となる。

$$\Rightarrow \text{もし, } \epsilon^2 M^2 \ll 1 \quad (14)$$

が成立すれば $\psi_{10}^{(5)}$ を支配する方程式は Stokes となる。この $\epsilon^2 M^2$ という形は

$$\epsilon^2 M^2 = \epsilon \frac{U_\infty L}{\nu} = \epsilon R = R_S \quad (15)$$

と書ける。ここで R は上の様に、普通の Reynolds 数である。したがって、Steady Streaming を支配する方程式は、 R_S が小さければ Stokes であるという重要な結果が得られた。この問題は長さの次元を有するものがあるため話が複雑になるが、これを明らかにすると

$$\text{振幅 } a \sim \text{粘性長さ } \sqrt{\nu\omega} \sim \text{物体長さ } L$$

$$a/L \sim \sqrt{\nu\omega}/L \sim 1$$

$$\epsilon \sim 1/M \sim 1$$

$$\text{なる故} \quad \epsilon \ll 1/M \ll 1$$

の条件が満たされた時、外部は Stokes Field になるというこ
である。

$\Delta^2 \psi_{10}^{(5)} = 0$ の境界条件は、境界層外縁に現われた定常流

$$\text{ie} \quad \frac{\partial \psi_{10}^{(5)}}{\partial n} = -\frac{3}{8} \frac{dV^2}{ds}, \quad \frac{\partial \psi_{10}^{(5)}}{\partial s} = 0 \quad ; \quad n=0 \quad (16)$$

である。この問題については、物体が円柱の場合 Schlichting⁶⁾ が計算し、流線図を与えた。 R_S が $O(1)$ や $R_S \gg 1$ の場合については、多くの人の研究があるが、これについては、やはり Rayley²⁾ を参照すればよく、ここでは述べない。

§ 2. 対稱 Joukowski 翼

ここでは、物体として上下対稱、前後非対稱な所謂対稱 Joukowski 翼の断面を有する柱の場合を論ずる。

先は、Stokes 方程式の解を求めておく。今 $e\mathcal{V}_1 = e(u_1, v_1)$ なる定常速度について、流れ函数 $e\psi_1$ を導入すれば

$$u_1 - iv_1 = 2i \partial \psi_1 / \partial \bar{z}$$

と書ける。さらに、 $\Delta^2 = 4 \partial^2 / \partial z \partial \bar{z}$

を用いて、Stokes 方程式は

$$\partial^3 (u_1 - iv_1) / \partial z \partial \bar{z}^2 = 0$$

となり、これを積分すれば、Stokes 方程式の解は一般に

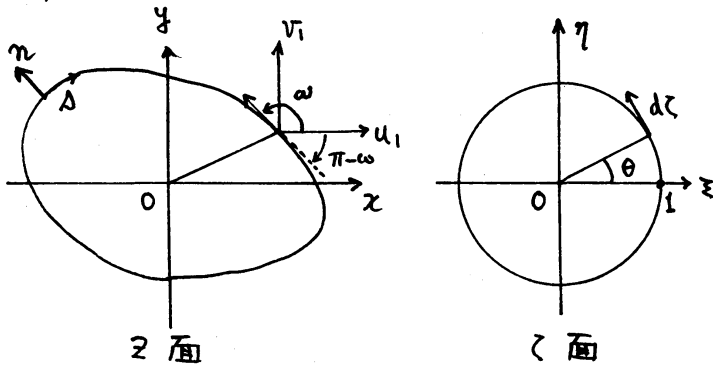
$$u_1 - iv_1 = \bar{z} \frac{df}{dz} - \bar{f}(\bar{z}) + g(z) \quad (17)$$

と書ける。ただし、 $f(z)$, $g(z)$ は流場を正則な函数とする。

ここで、 z 面の任意の柱の外部を ζ 面の単位円の外部に写像する函数を

$$z = z(\zeta)$$

とする。



左図を参照して Δ , η 方向の速度成分 g_Δ , g_η は次式の計算のようになる。

$$\begin{aligned} g_n - i g_n &= \frac{\partial \psi_1}{\partial n} + i \frac{\partial \psi_1}{\partial \lambda} = (u_1 - i v_1) e^{-i(\pi - \omega)} = -(u_1 - i v_1) e^{i\omega} \\ &= -\frac{3}{8} \frac{dV^2}{d\omega} = -\frac{3}{8} \frac{dV^2}{d\zeta} \frac{d\zeta}{d\bar{z}} \frac{d\bar{z}}{d\omega} = \frac{3}{8} \frac{dV^2}{d\bar{z}} \frac{d\zeta}{d\bar{z}} e^{i\omega} \end{aligned}$$

故に

$$u_1 - i v_1 = -\frac{3}{8} \left(\frac{d\bar{z}}{d\zeta} \right)^{-1} \frac{dV^2}{d\zeta} \quad t = t_1, \quad \zeta \bar{\zeta} = 1 \quad (18)$$

これを Stokes 解 (17) に代入すると

$$\bar{z} \left(\frac{1}{\zeta} \right) \left(\frac{d\bar{z}}{d\zeta} \right)^{-1} \frac{d\bar{z}}{d\zeta} - \bar{f} \left(\frac{1}{\zeta} \right) + g(\zeta) = -\frac{3}{8} \left(\frac{d\bar{z}}{d\zeta} \right)^{-1} \frac{dV^2}{d\zeta} \quad (19)$$

となる。この式は解析接続によって任意の ζ についても成立するべき式である。

さて、物体の形 (写像函数) は

$$z = \frac{1+\lambda}{4} \left\{ \zeta - \lambda + \frac{(1-\lambda)^2}{\zeta - \lambda} \right\}, \quad 0 < \lambda < 1 \quad (20)$$

を採用する。これは chord length = $4/(1+\lambda)$ となる z 、無限遠の一流線の大きさ ε とし、複素ポテンシャル F は

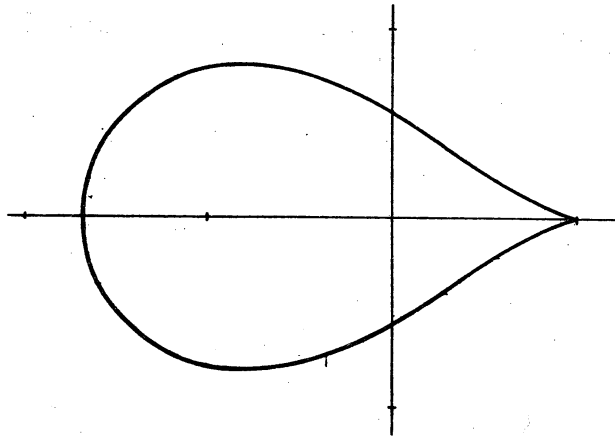
$$F = \frac{1+\lambda}{4} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) \quad (21)$$

であるから、

$$V^2 = \left(\frac{dF}{d\bar{z}} \frac{d\bar{F}}{d\bar{z}} \right)_{\bar{z}=1/\zeta} = \left(\frac{dF}{d\zeta} \frac{d\zeta}{d\bar{z}} \cdot \frac{d\bar{F}}{d\bar{z}} \frac{d\bar{z}}{d\bar{z}} \right)_{\bar{z}=1/\zeta}$$

の計算をするとき、 $\lambda = 1/2$ が非常に簡単になることが分る。

この様にして、計算が簡単になるだけで、一般性を失うことはない。この場の翼型は下図に示す様な形である。また、



物体表面の速度分布は

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial n} + i \frac{\partial \psi_1}{\partial s} = \frac{3}{8} \frac{dV^2}{dz} \cdot \frac{dz}{dz} \cdot e^{i\omega}$$

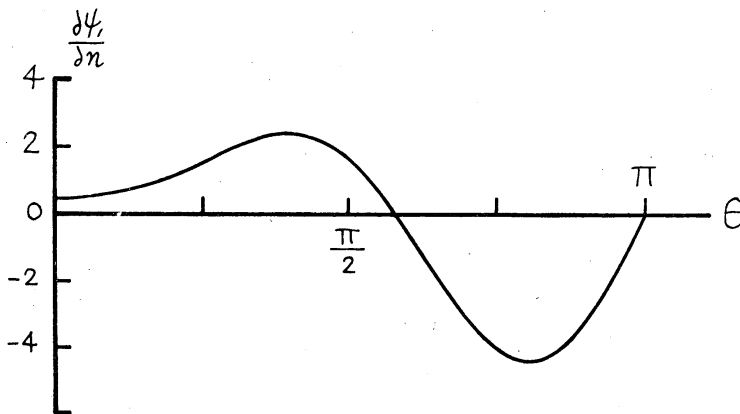
さらに

$$e^{i\omega} = iz \sqrt{\frac{dz}{dz} / \frac{d\bar{z}}{d\bar{z}}}$$

であることから、 $z = e^{i\theta}$ とおくと、

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial n} = 6 \left(\frac{5}{4} - \cos \theta \right)^2 \left(\frac{1}{4} + \cos \theta \right) \cos \frac{\theta}{2}, \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial s} = 0 \quad (22)$$

が得られる。これが境界層外縁に現われる問題の定常流であ



って、図示すれば、左の様な分布になっている。

$\lambda = 1/2$ の時、 $u_1 - i v_1$ を計算し、(19) に代入

すると、次の様になる。

$$\underbrace{\bar{z}}_{\text{外}} \left(\underbrace{\frac{1}{z}}_{\text{外}} \right) \left(\underbrace{\frac{dz}{dz}}_{\text{外}} \right)^{-1} \frac{df}{dz} - \underbrace{\bar{f}}_{\text{内}} \left(\underbrace{\frac{1}{z}}_{\text{外}} \right) + g(z) =$$

$$= \frac{-3}{4}z^2 + \frac{3}{2}z + \frac{3}{16}z^{-1} + \frac{3}{64}z^{-2} - \frac{81}{64}z^{-3} + \frac{15}{16}z^{-4} - \frac{3}{16}z^{-5} \quad (23)$$

内
内
外
外
外
外
外

上式の各因子の下に内, 外と書いたのは, 単位円の内部, 外部で正則な函数という意味である。左辺の第一項は具体的に計算をすれば

$$\left(\frac{1}{z} - 1 - \frac{1}{z-2}\right) \frac{(z-\frac{1}{2})^2}{z(z-1)} \frac{df}{dz}$$

となり, () 内の $1/(z-2)$ は単純 pole であるから, 次の操作によって, 外部で正則と内部で正則な函数に分離することができる。すなわち

$$\begin{aligned} & \underbrace{\frac{(z-\frac{1}{2})^2}{z(z-1)} \frac{df}{dz}}_{\text{外}} - \underbrace{\frac{(z-\frac{1}{2})^2}{z(z-1)} \frac{df}{dz} \frac{1}{z-2}}_{\text{両方外}} + \underbrace{\frac{(z-\frac{1}{2})^2}{z(z-1)} \frac{df}{dz}}_{\text{外}} \bigg|_{z=2} \frac{1}{z-2} \\ & \qquad \qquad \qquad - \underbrace{\frac{(z-\frac{1}{2})^2}{z(z-1)} \frac{df}{dz}}_{\text{内}} \bigg|_{z=2} \frac{1}{z-2} \end{aligned}$$

この様にして, (23) の各項を内部で正則な函数を左辺に, 外部で正則な函数を右辺へ移せば,

$$\begin{aligned} & \bar{f}\left(\frac{1}{z}\right) + \frac{9}{8} \frac{f'(2)}{z-2} - \frac{3}{4}z^2 + \frac{3}{2}z \\ & = g(z) - \frac{(z-\frac{1}{2})^2}{z^2} \left\{ 1 + \frac{z}{(z-1)(z-2)} \right\} f'(z) + \frac{9}{8} \frac{f'(2)}{z-2} - \frac{3}{16}z^{-1} - \frac{3}{64}z^{-2} + \frac{81}{64}z^{-3} - \frac{15}{16}z^{-4} + \frac{3}{16}z^{-5}. \end{aligned} \quad (24)$$

今, $f(z)$ は $z=1$ でも正則であると仮定すると, 左辺と右辺との正則な領域に共通部分が生じ, 両者が等しいためには, 全領域で正則, すなわち常数でなければならぬ。この常数は

一般性を失うことなく零にできるのだからこれより左辺が零, ie

$$\bar{f}\left(\frac{1}{z}\right) + \frac{9}{8} \frac{f(z)}{z-2} - \frac{3}{4} z^2 + \frac{3}{2} z = 0$$

ここで, z を $1/z$ とおきかえ, $z=2$ を代入すれば, $f(2) = \frac{1}{4}$ となり, 結局 $f(z)$ が次の様に決まる。

$$f(z) = \bar{f}(z) = \frac{3}{64} \left(z + \frac{1}{z-\frac{1}{2}} + \frac{16}{z^2} - \frac{3z}{z} \right). \quad (25)$$

これは確かに $z=1$ で正則である。 $f(z)$ が決まれば, (24) の右辺が零という式から $g(z)$ が

$$g(z) = \frac{3}{64} \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z} + \frac{23}{z^2} - \frac{77}{z^3} + \frac{56}{z^4} - \frac{12}{z^5} \right) \quad (26)$$

と決められる。これらと (17) に代入して, 流場の任意の点に於ける複素速度が得られる。

$$u_1 - iv_1 = \frac{3}{64} \left\{ \left(z - \frac{1}{2} + \frac{1/4}{z-\frac{1}{2}} \right) \left(-\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z} + \frac{3z}{z^2} - \frac{3z}{z^3} + \frac{8}{z^4} \right) - 2 - \frac{1}{z-\frac{1}{2}} + \frac{3z}{z} - \frac{16}{z^2} + \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z} + \frac{23}{z^2} - \frac{77}{z^3} + \frac{56}{z^4} - \frac{12}{z^5} \right\}. \quad (27)$$

$$\text{これは, } (u_1 - iv_1)_{|z| \rightarrow \infty} = -\frac{3}{32} \quad (28)$$

という興味ある結果を得る。 z の負の方向の流れが残る, z

の大きさは

$$\frac{3}{32} \in U_\infty = \frac{3}{32} \frac{U_\infty^2}{\omega L}$$

である。

流線図を画くために, (17) を書きかえて

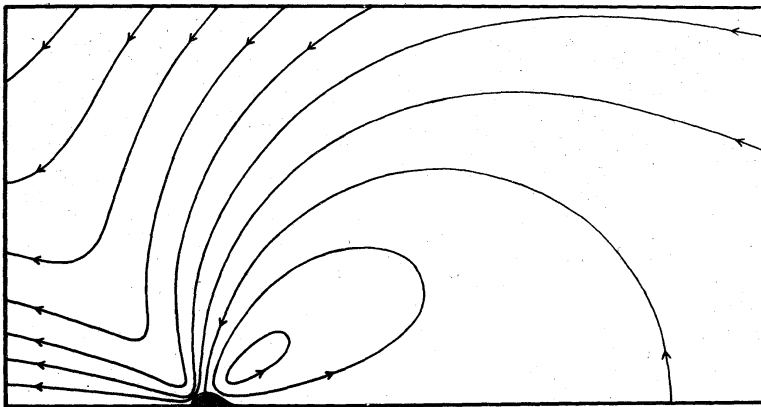
$$\bar{z}(\bar{z}) \frac{dz}{dz} \frac{df}{dz} - \bar{f}(z) + g(z) = 2i \frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}} \frac{dz}{dz}$$

これより, ψ_1 を求めると次の公式を得る.

$$\psi_1 = \mathcal{J} \left[\bar{z}(\bar{z}) f(z) + \int g(z) \bar{z}'(z) dz \right] \quad (29)$$

これを具体的に, 今の場合について計算すると次の様になる.

$$\psi_1 = \frac{9}{128} \mathcal{J} \left[\frac{1}{4} \left(\bar{z} - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{4}}{\bar{z} - \frac{1}{2}} \right) \left(2 + \frac{1}{z - \frac{1}{2}} - \frac{3z}{z} + \frac{16}{z^2} \right) - \frac{1}{z - \frac{1}{2}} - \frac{5}{z} + \frac{10}{z^2} - \frac{4}{z^3} \right] \quad (30)$$



(30) を用いて,
物理面で流線図
を画けば, 左の
様になる。非常
に大きい吸込み
みがあり, また

反対側には閉じた領域が生ずる。

以上は, 京大工, 航空 玉田球 と共著であり, 47年10月
広島に於ける物理学会で発表し, 現在投稿準備中である。

§ 3. 他の例.

§ 2 は Joukowski 翼 であるから, Trailing Edge は Cusp に

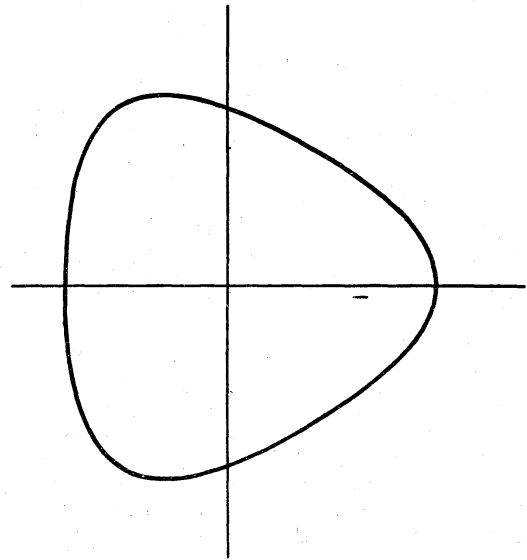
なる。このために、無限遠で $-x$ の方向に流れが残るのでは
ないかという問題、或は、物体の形でどちら向きの流れにな
るかというもっと一般的な問題がある。以上に述べた方法に
よると、写像函数を代入すれば、その後の計算は殆んど同一
であるので、結果だけを簡単に記す。

(a) Hypotrochoid

写像函数は

$$z = \zeta + \frac{\zeta^2}{\epsilon^2}, \quad 0 \leq \epsilon \leq \frac{1}{2} \quad (31)$$

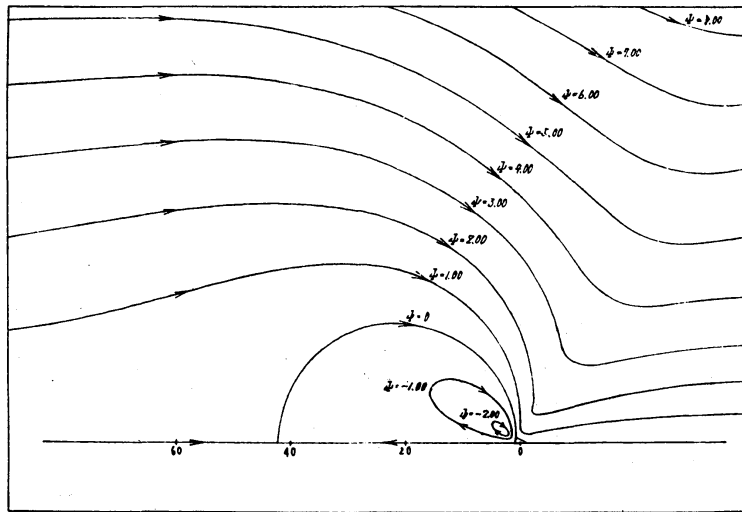
の場合、 $\epsilon = \frac{1}{2}$ は 曲正三角形
形となり、基礎式を求める境
界層近似自身が使えなくなる。
 $\epsilon \rightarrow 0$ は円であるので、 ϵ が
小さい時を問題にする。



上図は $\epsilon = 1/8$ の時の図である。Joukowski 翼の時と同様
 x の正軸の方向の方へ先細りになっているので、物体の形と
いう面から考えれば、前節と同様になると思えるが、結果は

$$(u_1 - i v_1)_\infty = 12 \epsilon^3$$

となり、正の方向の流れが残る。 $\epsilon = \frac{1}{4}$ の時の物理面に於
ける流線図は次頁に示す様なものになる。§2の結果からの
予想とは逆になった様な気がする。このために、§2のもの



は、Cusp の影響ではないか、という疑問が湧く。

(b) 一般 Joukowski 翼

このために、Cusp が図形 ~~の内部~~ に現われる様子は

$$z = \frac{3}{8} a \left[\zeta - \frac{1}{2a} + \frac{(1/2a)^2}{\zeta - 1/2a} \right], \quad a \geq 1 \quad (32)$$

なる写像を考へる。 $a \rightarrow 1$ の極限は §2 に戻るわけであるが、この解析は、全く問題の本質と関係のない点で非常に複雑になる点を除けば、本質的には全く Joukowski 翼の場合と同一であるという結果に到達する。つまり、§2 の結果は Cusp の影響ではないということである。

以上を考へ合わせると、物体の形を見ただけで、どちらの方向の流れが残るかという問題には、今の所答える方法は見付からない。物体の形、したがって、その表面の速度分布、

が非常に大きく効いているとは考え易いが、果してこれだけかどうか、一般論は難しい様に思われる。

§3 の部分は、詳述すると問題の本質を見失うおそれがあるので、この程度にしておきたい。

参考文献

- 1) M. J. Lighthill : Proc. Roy. Soc. 224 (1954) 1.
- 2) N. Riley : J. Inst. Maths. Applics., 3 (1967) 419.
- 3) H. Schlichting : 'Grenzschicht Theorie' (Verlag G. Braun, Karlsruhe, 1965) 401.
- 4) J. T. Stuart : 'Laminar Boundary Layers' (Oxford Univ. Press, Ed. by Rosenhead, 1966) 381.
- 5) G. K. Batchelor : 'An Introduction to Fluid Dynamics' (Cambridge Univ. Press., 1967) 353.
- 6) H. Schlichting : Phys. Zeits., 33 (1932) 327.