数理解析研究所講究録
215巻 1974年 143-189

浮動小数点演算の誤差評価と誤差消失について

富士通　山下眞一郎

目次

Ⅰ 浮動小数点演算の誤差評価 ---------- 2
1. まえがき ------------------- 2
2. 浮動小数点の数値 -------------- 2
3. 浮動小数点基本演算の誤差 --------- 4
4. 累和の誤差と計算例 ------------- 7
Ⅱ 誤差消失について --------------- 11
1. まえがき ------------------- 11
2. 基本的な誤差消失 --------------- 12
3. 誤差消失の一般形 --------------- 14
4. 除去可能な特異点の近傍における誤差消失 24
5 漸化式の誤差消失 --------------- 28
参考文献 ------------------- 30
数表 ---------------------- 31~47

Ⅰ　浮動小数点演算の誤差評価

1.　まえがき

J.H. Wilkinson [7, 8] によって，浮動小数点演算の誤差評価が容易になったが，まだ誤差限界の評価値は，しばしば実際の誤差よりも非常に過大な評価になってしまうことがある。この最大の理由は基本的な誤差の評価式に欠点があるためである。この論文の目的はJ.H. Wilkinsonの誤差の評価式と同じ程度の手間で，彼の欠点を補い，誤差の過大評価を解消することにある。

2.　浮動小数点の数値

定義：　任意の実数x^*をM進法L桁の浮動小数点で表わした値をxとするとき，次のように表わす。

(2.1)　　$x = FL(x^*)$

M進法L桁の零でない浮動小数点の数値xが$M^e > |x| \geqq M^{e-1}$であれば，$|x| = M^{e-1} + i \times M^{e-L}$, $0 \leqq i < M^L - M^{L-1}$, eは整数；を満す整数iが存在する。

任意の零でない実数x^*はこのようなxで近似することになる。FLは近似関数とみることができる。そして，その

内容は切捨て法，切上げ法，四捨五入法では次のようなものになる。

切捨て法:　$M^{e-1}+i\times M^{e-L} \leqq |x^*| < M^{e-1}+(i+1)\times M^{e-L}$ ならば，

$|x| = FL(|x^*|) = M^{e-1}+i\times M^{e-L}$, $|x-x^*| < M^{e-L}$　となる。

切上げ法:　$M^{e-1}+i\times M^{e-L} < |x^*| \leqq M^{e-1}+(i+1)\times M^{e-L}$ ならば，

$|x| = FL(|x^*|) = M^{e-1}+(i+1)\times M^{e-L}$, $|x-x^*| < M^{e-L}$ となる。

四捨五入法（一般には $M/2-1$ 捨 $M/2$ 入法）

$M^{e-1}+(i-0.5)\times M^{e-L} \leqq |x^*| < M^{e-1}+(i+0.5)\times M^{e-L}$ ならば，

$|x| = FL(|x^*|) = M^{e-1}+i\times M^{e-L}$, $|x-x^*| \leqq 0.5\times M^{e-L}$ となる。

従って，$M^{e-1} \leqq |x^*| \leqq M^{e}$ であるならば，

$$|(x-x^*)/x| \leqq u,\quad u = \gamma\times M^{1-L},\quad 0.5 \leqq \gamma \leq 1.0$$

となる。　これから次のような定理が得られる。

定理 1　任意の実数 x^* とその M 進法 L 桁の浮動小数点の数値 x，即ち $x = FL(x^*)$ の間には次の関係が成立する。

(2.2)　$|x|(1-u) < |x|(1+u)^{-1} \leqq |x^*| \leqq |x|(1+u) < |x|(1-u)^{-1}$

(2.3)　$|x^*|(1-u) < |x^*|(1+u)^{-1} \leqq |x| \leqq |x^*|(1+u) < |x^*|(1-u)^{-1}$

(2.4)　$x^* = x(1+\theta_a) = x(1+\theta_a')^{-1}$, $|\theta_a|, |\theta_a'| \leqq u$

(2.5)　$x = x^*(1+\theta_b) = x^*(1+\theta_b')^{-1}$, $|\theta_b|, |\theta_b'| \leqq u$

但し　$x^* \neq 0$　, $x \neq 0$

3. 浮動小数点基本演算の誤差

浮動小数点は有効数字を一定に保持するために工夫されたものであり，大小様々な大きさの数値を扱うのに便利である．しかし，計算の結果がいつでも有効な誤差のない有効数字を保持しているとは限らない。それは，計算の内容によっては，計算の途中の各段階で発生した計算誤差の堆積が最後の結果にとって無視し得ない大きさになったり，同じ程度の大きさの数値の差によって有効数字を失う，いわゆる桁落ちなどのために，有効数字を保持し得なくなることがあるためである。有効数字を極端に失うのは，急激な，または緩慢ないろいろな形式の桁落ち現象によるもので，これは加減算で起きる。従って，加減算，即ち，累和では必ずしもよく有効数字が保持されるとは限らない。一方，乗除算，即ち，累積では有効数字を極端に失うことがなく，非常によく保持される。このような理由で，浮動小数点演算の誤差評価の基本課題は累和の誤差評価にある．

浮動小数点演算における誤差評価の困難は結合律や分配律が必ずしも成立しないことや加法に対する単位元0が一意的に定まらないことなどによる。Wilkinson は四則演算に対して，次のような定理を導き，この困難をある程度回避した。

<u>定理２</u>　x, y が M 進法 L 桁の浮動小数点の数値のとき，これらの四則演算の結果に対して，次式が成立する．

(3.1)　$$FL(x\pm y)=x(1+\alpha)\pm y(1+\beta),\ |\alpha|,|\beta|\leqq u$$

(3.2)　$$FL(xy)=xy(1+\gamma),\ |\gamma|\leqq u$$

(3.3)　$$FL(x/y)=(x/y)(1+\delta),\ |\delta|\leqq u,\ y\neq 0$$

誤差限界は次のようになる。

(3.4)　$$|FL(x\pm y)-(x\pm y)|\leqq(|x|+|y|)u$$

(3.5)　$$|FL(xy)-xy|\leqq|xy|u$$

(3.6)　$$|FL(x/y)-x/y|\leqq|x/y|u$$

定理の前半は理論数学的に正確な式であるから，結合律も分配律も成立ち，計算式の取扱いが容易になる．　しかし，前半の式は本質的には後半のような不等式であるため，誤差評価は，結局，誤差限界を求めることになる。　ところが評価された誤差限界は，しばしば，実際の誤差よりも非常に過大である。　著者はこれを改善するために，次の定理を導入した．

<u>定理３</u>　x, y が M 進法 L 桁の浮動小数点の数値のとき，これらの加減算の結果に対して，次式が成立する．

(3.7)　$$FL(x\pm y)=(x\pm y)+\max\{|x|,|y|,|x\pm y|\}\varepsilon,\ |\varepsilon|\leqq u$$

(3.8)　$$(x\pm y)=FL(x\pm y)+\max\{|x|,|y|,|FL(x\pm y)|\}\theta,\ |\theta|\leqq(1+u)u$$

$$(3.9)\qquad |FL(x \pm y) - (x \pm y)| \leqq \max\{|x|, |y|, |x \pm y|\}u$$

$$(3.10)\qquad \leqq \max\{|x|, |y|, |FL(x \pm y)|\}(1+u)u$$

略証

この証明は浮動小数点加減算を説明することに外ならない．加減算は始めに小数点の位置を揃える，桁揃えを行なう。このとき，計算機にもよるが指数部の小さい方が情報落ちする。指数部の大きい方を中心に桁揃えするので情報落ちの量は高々 $\max\{|x|, |y|\}u$ である．そして，加減算の結果が桁上りしなければ，これが $FL(x \pm y)$ の誤差限界となる．桁上りすれば，$(x \pm y)$を任意の実数と解釈して，$FL(x \pm y)$の誤差限界は定理1から $|x \pm y|u$ である．よって，(3.7), (3.9) 式が示された。(3.8), (3.10) 式は定理1から $|x \pm y| \leqq |FL(x \pm y)|(1+u)$ であるから示される．（略証終）

定理2, 3を比較するために，

$$\eta = \frac{\max\{|x|, |y|, |x \pm y|\}}{|x| + |y|}, \quad |x| + |y| \neq 0$$

とおくと，$1/2 \leqq \eta \leqq 1$ である。xと$\pm y$が同符号ならば，$\eta = 1$ であり，xと$\pm y$が異符号ならば，$1/2 \leqq \eta < 1$ となる。

即ち，Wilkinson の評価式である定理2はx, yの符号に対する考慮が払われていない。著者の評価式である定理3はx, yの符号に対する考慮が払われている．このためにxと

x, yが異符号で，$|x|=|y|$ のとき，$\eta=2$ となって，誤差限界は定理2は定理3よりも2倍も過大に評価することになる。

4. 累和の誤差と計算例

次式のような累和の計算法として，Peter Ling [10] は計算

(4.1) $$y=\sum_{k=1}^{n} x_k$$

誤差を少なくするために，Tournament 加算方式を提案した。

J. M. Wolfe [11] は Cascading 加算方式を提案し，M. A. Malcolm [9] はその誤差評価について詳しく述べている。しかしこれらの方式は手間のかゝる方法で，よく用いられる方法は次のような逐次加算方式である。

(4.2) $$y_1=x_1;\quad y_k=FL(y_{k-1}+x_k),\ k=2,3,\cdots,n;\quad y\equiv y_n$$

これを定理2に従って評価すると次のようになる。

(4.3) $$y_k=(1+\alpha_k)y_{k-1}+(1+\beta_k)x_k,\ |\alpha_k|,|\beta_k|\leqq u,\ k=2,3,\cdots,n$$

(4.4) $$y_n=\sum_{k=1}^{n}(1+\eta_k)x_k$$

(4.5) 但し $$1+\eta_1=\prod_{i=2}^{n}(1+\alpha_i);\quad 1+\eta_r=(1+\beta_r)\prod_{i=r+1}^{n}(1+\alpha_i),\ r=2,3,\cdots,n$$

この η を評価するためには次の補題が役立つ。

<u>補題</u>　$n=1,2,3,\cdots$ に対して，$|\theta_k|\leqq u$，$k=1,2,\cdots,n$ かつ $0\leqq nu\leqq\delta\leqq 1$ ならば

(4.6) $$1-nu\leqq\prod_{k=1}^{n}(1+\theta_k)\leqq 1+(1+\delta)nu$$

である。

この補題から (4.5) 式は，$0 \leqq (n-1)u \leqq \delta \leqq 1$ と仮定して

$$(4.5') \quad \begin{cases} 1-(n-1)u \leqq 1+\eta_1 \leqq 1+(1+\delta)(n-1)u \\ 1-(n+1-r)u \leqq 1+\eta_r \leqq 1+(1+\delta)(n+1-r)u \end{cases}$$

となる。　従って，Wilkinson の定理2を基礎におけば，次の定理を得る。

<u>定理4</u>　n 個の M進法 L桁の浮動小数点の数値 x_k, $k=1,2,\cdots,n$ の和を $y_1=x_1$; $y_k=FL(y_{k-1}+x_k)$, $k=2,3,\cdots,n$; $y \equiv y_n$ とし，$0 \leqq (n-1)u \leqq \delta \leqq 1$ と仮定すれば，次式を得る。

$$(4.7) \qquad y=\sum_{k=1}^{n}x_k+\left\{|x_1|(n-1)\theta_1+\sum_{r=2}^{n}|x_r|(n+1-r)\theta_r\right\} ; |\theta_k| \leqq (1+\delta)u, k=1,2,\cdots,n$$

$$(4.8) \qquad \left|y-\sum_{k=1}^{n}x_k\right| \leqq \left\{|x_1|(n-1)+\sum_{r=2}^{n}|x_r|(n+1-r)\right\}(1+\delta)u$$

著者の定理3を基礎におけば，次の定理を得る。

<u>定理5</u>　定理4と同一条件に対して，次式を得る。

$$(4.7') \qquad y=\sum_{k=1}^{n}x_k+\sum_{r=2}^{n}\max\{|y_{r-1}|,|x_r|,|y_r|\}\theta_r ; |\theta_r| \leqq (1+u)u, r=2,3,\cdots n$$

$$(4.8') \qquad \left|y-\sum_{k=1}^{n}x_k\right| \leqq \sum_{r=2}^{n}\max\{|y_{r-1}|,|x_r|,|y_r|\}(1+u)u$$

次に幾つかの計算例を示そう。

<u>例題1.</u>（Wilkinson の例題）　$M=2, L=t, u=2^{-t}$（0捨1入）

及び $x_1=1$, $x_2=1-u$, $x_3 \sim x_4=1-2u$, $x_5 \sim x_8=1-2^2u$

$x_{2^{m-1}+1} \sim x_{2^m}=1-2^{m-1}u$, $n=2^m$

__解__　(真値) $\equiv \sum_{k=1}^{n} x_k = 2^m - \frac{1}{3}(4^m-1)u = n - \frac{1}{3}(n^2-1)u$

(計算値) $\equiv y_n = 2^m = n$

(誤差の絶対値) $\equiv E = |y_n - \sum_{k=1}^{n} x_k| = \frac{1}{3}(n^2-1)u$

(定理4による誤差限界) $\equiv E_1 = \frac{(n+2)(n-1)}{2}(1+\delta)u$

(定理5による誤差限界) $\equiv E_2 = \frac{(n+2)(n-1)}{2}(1+u)u$

となるから，$E : E_1 : E_2 \fallingdotseq 2:3:3$ となって，定理4,5共に，ほぼ同じ良い評価を与える.

__例題2__　$x_k = (-1)^k x$

__解__　(真値) $\equiv \sum_{k=1}^{n} x_k = \begin{cases} -x & (n\text{が奇数のとき}) \\ 0 & (n\text{が偶数のとき}) \end{cases}$

(誤差の絶対値) $\equiv E = |x|(n-1)u$　(高々)

(定理4の誤差限界) $\equiv E_1 = \frac{|x|(n+2)(n-1)}{2}(1+\delta)u$

(定理5の誤差限界) $\equiv E_2 = |x|(n-1)(1+u)u$

となるから，$E : E_1 : E_2 \fallingdotseq 1 : n/2 : 1$ となって，Wilkinsonの結果は n倍のオーダの過大評価になるが，著者の結果はほぼ良い評価を与える。

__例題3__　$x_k = (-1)^k \sin(k\theta)$，$\theta$: given

__解__　定理4と定理5を比較するために，次のような値を定義する.

$$y_k = FL(y_{k-1} + x_k),\ k=1,2,\cdots,n\ ;\ y_0 = 0$$

$$y_k^* = \sum_{k=1}^{n} x_k$$

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} |x_k| (n+1-k)(1+nu)\, u$$

$$B_n = \sum_{k=2}^{n} \max\{|y_{k-1}|, |x_k|, |y_k|\} (1+u)\, u$$

このように置いて，n，y_n，y_n^*，$y_n - y_n^*$，A_n，B_n を求める。

$(-1)^k \sin(k\theta)$ は倍精度で計算し，それを単精度に丸めて x_k を求める。 y_k^* は x_k を倍精度で累和し，残りはすべて単精度で計算する。

第Ⅰ.1～Ⅰ.8 表に $\theta = 0.01,\ 0.1,\ 0.9,\ 1.0,\ 1.3,\ 1.57,\ 2.0,\ 3.0$ に対して，$M=2$，$L=26$，$u=2^{-26}$ で計算した結果を示す。

別に $M=16$，$L=6$，$u=16^{-5}$ に対しても計算したが同様の結果を得たが，これは省略した。

これらの結果を見れば，Wilkinson の結果よりも著者の結果が累和の誤差の実情をよく現わしていることがわかる。

II 誤差消失について

1. まえがき

誤差限界の評価値が実際の誤差よりも過大になる理由の1つは，1回の演算で発生する誤差を過大に見積るためであるが，その改善ですべてが解決されるわけではない。 誤差限界の評価値が実際の誤差よりも過大になる，いま1つの理由は誤差消失があるからである． 普通，誤差限界は個々の演算で発生した誤差が拡大される方向に働くと仮定して評価している。 このようなことは，誤差の間に密接な関連があるときのみ可能である。 これとまったく同様に，発生する誤差の間に密接な関連があって，誤差が打消し合うように働いて，拡大しない場合が考えられる。 これから述べるのはこのような場合である． 誤差消失が起きれば，当然，今までの誤差限界の評価値は，実際の誤差よりも過大になる。 しかし，このような誤差消失を考慮した誤差評価法は誤差の間の関係が個々の問題で違うから，一律にはゆかず，問題ごとに誤差の間の関係を明確にして解析しなければならない．

誤差消失が起こり得るということは，多数回の演算の後ちに得られた結果の信頼性に，常に，楽観的見通しを与えるわけではないが，少なくとも，今までの誤差限界の評価から得られる悲観的見通しに対しては楽観的材料である。

2. 基本的な誤差消失

誤差消失はいろいろな場合に起り得る。 それは，有効数値が消失する場合となんら変るところがない。 四則演算によって，誤差消失が起きるのは，次のような場合が考えられるが，実際には，これらが複雑に組合されて誤差消失が起きると考えられる。

(A) 加減算による誤差消失

加算による誤差消失は，加数と被加数に逆符号の誤差が含まれている場合に起きる。 例えば，被加数をA，加数をBとし，a，bをそれらの真値，$\tilde{e}$を誤差とするとき，$A=a+\tilde{e}$　$B=b-\tilde{e}$ とすれば，加算によって，

$$A+B=(a+\tilde{e})+(b-\tilde{e})=a+b$$

となり，A，Bに誤差が含まれていても，A+B の結果には誤差は含まれていない。 ここで重要な注意すべき点はaと$\tilde{e}$，bと$\tilde{e}$の関係で，相対誤差$\tilde{e}/a$，$\tilde{e}/b$ の大きさにはなんら関係がないと言う点である。 相対誤差が大きくて，$\tilde{e}$の中にaまたはbが埋没していても，即ち，A，Bが誤差ばかりとみなされる場合でも，誤差はきれいに消失するのである。このような問題に対して，従来の誤差限界の評価法は

$$|(A+B)-(a+b)|\leqq|A-a|+|B-b|\leqq|\tilde{e}|+|\tilde{e}|=2|\tilde{e}|$$

とするのであるから，過大評価になるのが当然である。

減算では $A=a+\hat{e}$, $B=b+\hat{e}$ のように A, B 共に同じだけの誤差が同符号で含まれている場合に，加算と同様の誤差消失が起きる。

(B) 乗算による誤差消失

乗算による誤差消失は，除算の場合の逆のような場合も考えられるが，次のような場合にも起きる。 例えば，被乗数をA，乗数をBとし，cをそれぞれの真値，$\hat{e}$を誤差とするとき，$A=c+\hat{e}$，$B=c-\hat{e}$ とすれば，乗算によって，

$$A \times B = (c+\hat{e}) \times (c-\hat{e}) = c^2 - \hat{e}^2$$

となり，$|\hat{e}/c| < 1$ とすれば，$|\hat{e}^2/c^2| << 1$ となり，A, B の相対誤差よりも $A \times B$ の相対誤差は縮少される。

ここで重要なことは，このような場合の誤差消失は A, B の相対誤差が1より小さくなければならないことである。もしも，相対誤差が1よりも大，即ち，A, B が誤差におゝわれ，誤差ばかりとみなされるときは，ますます誤差が拡大されることに注意しなければならない。

(C) 除算による誤差消失

除算による誤差消失は分母，分子に誤差ばかりの同じ定数が乗ぜられているときに，その誤差ばかりの定数である共通因子が約分されて，正しい分数になるときに起きる。 例えば，分母をA，分子をBとし，それぞれ a, b を真値，$\hat{e}$ $(\neq 0)$

を誤差とするとき，$A=a\times\tilde{e}$，$B=b\times\tilde{e}$ とすれば，除算によって

$$B/A = (b\times\tilde{e})/(a\times\tilde{e}) = b/a$$

となり，A，Bがどんなに誤差を含んでいても，その商は正しい結果になる。

(F)　乗除算による誤差の減衰消失

例えば，1次漸化式 $x_k = a_k x_{k-1} + b_k$ で，初期値 x_0 が誤差を多く含んでいても，$|a_k|<1$ ならば，x_0 の誤差は減衰消滅する。　同様に，$x_k = x_{k-1}/a_k + b_k$ のとき，$|a_k|>1$ ならば，初期値の誤差は消滅する。

3　誤差消失の一般形

関数 $f(x)$ を計算する場合，x に ε の誤差が含まれているとき，計算の結果，これが消失する場合を考える。

$f(x+\varepsilon)$ を x のまわりに展開できるとし，

$$(3.1)\qquad f(x+\varepsilon) = f(x) + \varepsilon f'(x) + \frac{\varepsilon^2}{2!}f''(x) + \cdots + \frac{\varepsilon^m}{m!}f^{(m)}(x) + \cdots$$

とする。　$x=a$ 点において

$$(3.2)\qquad f(a)\neq 0,\ f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(m)}(a) = 0,\ f^{(m+1)}(a)\neq 0$$

であり，$f^{(m+1)}(a)/(m+1)!$ が十分小さければ，ε の影響は非常に小さいものとなり，$x=a$ の近傍では x に含まれる誤差は $f(x+\varepsilon)$

の計算途中で，その影響がどのように大きなものであっても消失しなければならない。　(3.2)式を満足する関数は

$$(3.3)\qquad f(x)=C+(x-a)^m g(x),\ g(a)\neq 0,\ C\neq 0$$

と表わすことが出来る。　(3.2)式の条件は，もう少し緩和できて，次のような場合でも同様のことが起きる。

$$(3.4)\qquad |f(a)|,\ |f'(a)|,\ \cdots,\ |f^{(m)}(a)| \ll 1$$

(3.3)式から誤差消失の起きる例は簡単に作れる。　従って実際にもよく現われる，ありふれた誤差消失の例が作れる。そのいくつかを次に示そう。

(A)　<u>3次方程式</u>

3次方程式 $x^3+px+q=0$ の根はCardanoの公式で

$$(3.5)\qquad m=\sqrt[3]{-q/2+\sqrt{D}},\quad n=\sqrt[3]{-q/2-\sqrt{D}},\quad D=(q/2)^2+(p/3)^3$$

とおけば，3根 $x_1,\ x_2,\ x_3$ は

$$(3.6)\qquad x_1=m+n,\quad x_2,x_3=-\frac{(m+n)}{2}\pm(m-n)\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

と求められる。　誤差消失が起きるのは，Dが誤差ばかりになって，しかも $q/2$ に比べて $\sqrt{D}$ が小さいときである。　このとき，x_1 と x_2,x_3 の和の部の誤差だけが消失する。

$x=-q/2$，$\varepsilon=\sqrt{D}$ とおけば，

$$(3.7)\quad (m+n)=\sqrt[3]{x+\varepsilon}+\sqrt[3]{x-\varepsilon}$$

となる。右辺を $|\varepsilon/x|<1$ と仮定して展開すれば，

$$(3.8)\quad (m+n)=2\sqrt[3]{x}\left\{1-\frac{2}{9}(\varepsilon/x)^2-\frac{80}{81}(\varepsilon/x)^4-\cdots\right\}$$

となる。$\sqrt[3]{x+\varepsilon}$，$\sqrt[3]{x-\varepsilon}$ にはそれぞれ ε のオーダの項も含まれているが，$(m+n)$ には ε^2 の項から現われて，ε の項は打消されている。$(m-n)$ には ε の項が現われるので，このような場合，即ち，2重根またはそれに近い場合は2重根の方の差の部には誤差が大きく現われ，単根及び2重根の和部には計算の途中で多少の誤差が入っても，その誤差が消失して，より結果が求められる。

どの程度の誤差まで消失するかは(3.8)式によって決められる。即ち，計算桁数をLとすると $|\varepsilon/x|<10^{-L/2}$ であれば，ε の影響は無視される。例えば，$2\pi,-\pi,-\pi$ を根とする方程式は，8桁で計算すると

$$p=-3\pi^2=-29.608813\ ,\ q=-2\pi^3=-62.012553$$

$$(p/3)=-9.8696043\ ,\ (q/2)=-31.006277$$

$$(p/3)^3=-961.38916\ ,\ (q/2)^2=+961.38921$$

$$D=(q/2)^2+(p/3)^3=+0.00005\ ,\ \sqrt{D}=+0.0070710678$$

$$m^3 = -(q/2) + \sqrt{D} = +31.013348\ , \quad m = +3.1418315$$

$$n^3 = -(q/2) - \sqrt{D} = +30.999206\ , \quad n = +3.1413538$$

従って，

$$x_1 = +6.2831853$$

$$x_{2,3} = -3.14159265 \pm 0.00041370033\,i$$

となる。　このようにDの末位に入った誤差が開平によって(q/2)の中ほどの大きさとなり，m, n は4桁しか一致していない。　しかし，x_1 は $2\pi = 6.283185307\cdots$ に十分近い値である。　また，$x_{2,3}$ の実部も $-\pi$ に十分よく合っている。

(B)　多項式の値

(3.3)式を満足する多項式を作るのは簡単である。　例えば，$m=3$, $a=-1$, $g(a)=1$, $C=1.2345$ とすれば，

$$(3.9) \qquad f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 2.2345$$

となるが，$x=-1.0$ の近傍で，下線を誤差とすると

$x = -1.0\underline{1}$ の場合

$x^3 =$	$-1.0\underline{30301}$
$3x^2 =$	$+3.0\underline{60300}$
$3x =$	$-3.0\underline{30000}$
+) (定数) $=$	$+2.234500$
$f(x=-1.0\underline{1}) =$	$+1.23449\underline{9}$

$x = -1.0\underline{2}$ の場合

$x^3 =$	$-1.0\underline{61208}$
$3x^2 =$	$+3.\underline{121200}$
$3x =$	$-3.0\underline{60000}$
+) (定数) $=$	$+2.234500$
$f(x=-1.0\underline{2}) =$	$+1.23449\underline{2}$

のようになる。　ところが $f(x=-1.0) = 1.2345$ であるから，

xの小数点以下２桁目の誤差が，計算の途中ではやはり小数点以下２桁目程度の大きとして現われ，最終的には小数点以下６桁目に影響することになる。 多項式の各項の相対誤差はxの相対誤差のそれと同じ程度であるが，多項式の値は３倍桁もよくなっている。 即ち，累和によって，誤差が消失したと考えることができる。 この例の$f(x)$の絶対誤差は$x=-1.0$に対する絶対誤差の３乗の大きさである。 (3.3)式も同様に，$f(x)$の絶対誤差は$g(a)$の大きさにもよるが，$x=a$に対する絶対誤差のほぼm乗の大きさである。 従って，$x=a$に対する絶対誤差が１よりも小さければ，$f(x)$の絶対誤差は非常に小さくなる。

(C) 級数の値

級数は多項式と同じであるが，少し違う。 まず例題を示そう。 $\sin(x)$のテーラー展開

$$(3.10)\qquad \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \quad = \lim_{n\to\infty} S_n$$

$$(3.11)\qquad \text{但し}\quad S_n = \sum_{k=0}^{n} T_k \;,\quad T_k = (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

を利用して，xが与えられたときに，$\sin(x)$を計算することを考える。 $x=20$ の場合に10進30桁強で計算した(3.11)式の値，T_n^*，S_n^* は第II.1表のようになる。 一方，xに10^{-8}の誤差が入って，$x=20+10^{-8}$となった場合に同じように計算し

た(3.11)式の値，T_n，S_nは第Ⅱ.2表のようになる。第Ⅱ.2表には$T_n - T_n^*$，$S_n - S_n^*$も示した。これは第n項又は第n項の和に対する誤差εの影響である。$T_{10} - T_{10}^*$は約0.43，$S_{10} - S_{10}^*$は約0.21になっている。従って，nを増せば，S_nは相当にS_n^*と違う結果が得られそうである。ところが，S_{40}ではS_{40}^*との差異が約4.1×10^{-9}になっていて，T_{10}，S_{10}の小数点以下1桁目にあった誤差は消えてしまっている。即ち，級数の各項に入っている誤差が十分な精度で和を計算した為に消失したものと考えられる。

このように，$\sin(x)$のxに含まれる誤差εのテーラー展開された各項に与えている影響が十分な精度で和を取ることによって，消失するのは，次のような必然性による。

$\sin(x+\varepsilon)$をxのまわりにテーラー展開すると，

$$(3.12) \quad \sin(x+\varepsilon) = \sin(x) + \varepsilon\cos(x) - \frac{\varepsilon^2}{2!}\sin(x) - \cdots$$

のようになるから，$|\varepsilon|$が十分小さければ，ε^2以上の項を無視して，$\sin$に対するεの影響は，十分精密に計算することによって，最終的に，$\varepsilon\cos(x)$となるはずである。従って，$|\cos(x)| \leq 1$であるから，級数の各項にどんな大きな影響が現われても，最終的には高々εの程度の影響になるはずである。

これを確めるために，$\cos(x)$のテーラー展開

$$(3.13) \qquad \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots = \lim_{n\to\infty} S_n$$

$$(3.14) \qquad \text{但し} \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} T_k, \quad T_k = (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

によって，$\sin(x)$と同様に計算したものを第II.3表，第II.4表に示す。 これから，第II.2表の$T_n - T_n^*$, $S_n - S_n^*$の大きさが第II.3表のT_n^*, S_n^*のε倍にほぼ等しいことがわかる。（その違いはε^2の影響である）． さらに，(3.12)式から理解されることであるが，$\cos(x) = 0$となるようにxを選べば，εの奇数項が消えるので，ε^2のオーダーの誤差しか残らない。 このような場合には，級数の各項の誤差は桁落ちによって消失することになる。 $x = 13\pi/2 \fallingdotseq 20.42\cdots$，$\varepsilon = 10^{-5}$に対して，$\sin(x)$, $\sin(x+\varepsilon)$について計算したT_n^*, S_n^*及びT_n, S_n, $T_n - T_n^*$, $S_n - S_n^*$を第II.5, 6表に示す。 又，同じ値に対して計算した$\cos(x)$, $\cos(x+\varepsilon)$に対する値を第II.7, 8表に示す。

$x = 20$に対する$\varepsilon = 10^{-8}$よりも，$x = 13\pi/2$に対する$\varepsilon = 10^{-5}$の方が$\sin(x)$では影響が少ないことがわかる。 また$x = 13\pi/2$のとき，$\cos(x)$にはεの影響がεのオーダーで現われている。

(D) 反復法

反復法によって近似解を改善する計算法において，その反復式は近似解に含まれる誤差を消失させるような計算式である —— むしろ，そのような計算式でなければならない ——

と解釈することが出来る。

2次以上の反復式は誤差の桁落ち消失であり，1次の反復式は（収束するとき）減衰消失である。

例えば，Newton の反復法で $a\ (>0)$ の平方根を求める場合は

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + a/x_n\right)\ ;\ n=0,1,\cdots;\ 但し\ x_0\ は\ \text{given}$$

によるが，$x_n = \sqrt{a} + \varepsilon_n,\ |\varepsilon_n/\sqrt{a}| < 1$ とすれば，

$$\begin{aligned} a/x_n &= a/(\sqrt{a}+\varepsilon_n) \\ &= \sqrt{a} - \varepsilon_n + \varepsilon_n^2/\sqrt{a} - \varepsilon_n^3/\sqrt{a} + \cdots \end{aligned}$$

であるから，

$$x_{n+1} = \sqrt{a} + \varepsilon_n^2/(2\sqrt{a}) - \varepsilon_n^3/(2a) + \cdots$$

となって，x_n と a/x_n に含まれている ε_n の項がこれらの和によって，丁度打消し合う。即ち，ε_n を x_n の $\sqrt{a}$ に対する誤差とすれば，x_n と a/x_n に含まれる誤差が打消し合って消失したことになる。

（E）<u>多項式の係数を求める</u>.

ある種の高次代数方程式は敏感な問題，即ち，係数の僅かな変化が根に大きな変化をもたらすことが知られている。

ここでは，このような場合の逆を問題にする。明らかに逆の問題は鈍感な問題である。根が多少変化しても，多項式の係数はあまり変化しないのである。即ち，根が多少の

誤差を含んでいても，多項式の係数の誤差は根の誤差ほどには大きくない。その原因が誤差消失に起因していると考えることが出来る。簡単のため，２次式を例に取る。

２次方程式 $x^2-2px+q=0$ の根は $x_1=p+\sqrt{p^2-q}$，$x_2=p-\sqrt{p^2-q}$ となるが，この根の判別式 $D=p^2-q$ が 0 ならば，重根である。しかし，数値計算では，$D=0$ となるべきであっても，丁度 $D=0$ となることは困難で，$p, q \sim 1.0$ 程度の大きさの数であれば，$D=\varepsilon \sim 10^{-L}$，$L$ は計算桁数，となるのが普通である。そうすれば，$\sqrt{D} \sim 10^{-L/2}$ となって，根の精度は計算桁数の半分程度になる。これはよく知られていることである。

しかし，ここで問題にしているのは，この逆の操作である。

$$x_1 = p+\sqrt{\varepsilon}, \quad x_2 = p-\sqrt{\varepsilon}$$

とし，$|\sqrt{\varepsilon}/p| < 10^{-L/2}$ であるとする。このとき，x_1, x_2 を根とする多項式の係数は

$$(x-x_1)(x-x_2) = x^2+a_1x+a_0$$

とおけば，

$$a_1=-(x_1+x_2)=-2p, \quad a_0=x_1x_2=p^2-\varepsilon$$

であるから，a_1 には ε の影響は現われない。a_0 にも $|\varepsilon/p^2| < 10^{-L}$ となって，ε の影響はなくなってしまう。

例えば，

$$x_1=1.324+0.002=1.326, \quad x_2=1.324-0.002=1.322$$

とすれば，

$$a_1 = -2.648 \quad , \quad a_0 = 1.752972$$

となる。　また，

$$x_1 = 1.324 + 0.001 = 1.325 \ , \ x_2 = 1.324 - 0.001 = 1.323$$

とすれば，

$$a_1 = -2.648 \ , \ a_0 = 1.752975$$

となる。　ところが，真値 $x_1 = x_2 = 1.324$ に対しては $a_1 = -2.648$，$a_0 = 1.752976$ であるから，x_1, x_2 の 0.002 及び 0.001 の誤差が a_0 のみに，わずか 0.000004 及び 0.000001 の誤差となって現われる。　a_1 に誤差が入らないのは，明らかに誤差が桁落ちして消失した為であり，a_0 の誤差も乗算による誤差消失と解釈できる。

一般次数の場合は，敏感な問題というのが近接根，または重根の場合であり，重根の場合が最も極端な場合であるからこれについて考察すればよい。　いま，

$$f(x) = \prod_{k=1}^{n} (x - x_k)$$

とおく．　m 個の x_k が a から $\varepsilon \omega_m^k$ ずれているとする。即ち，

$$x_k = a + \varepsilon \omega_m^k \ , \ k = 1, 2, \cdots, m$$
$$\text{但し，} \ \omega_m = \cos(2\pi/m) + i \sin(2\pi/m)$$

とすれば，

$$\prod_{k=1}^{m}(x-a-\varepsilon\omega_m^k) = (x-a)^m-\varepsilon^m$$

となる。 $|\omega_m^k|=1$ であるが，a に比べて ε を十分大きく，また，$(x-a)^m$ の展開係数に比べて ε^m を十分小さく選ぶのは簡単である。 よって，このような場合，ε をいろいろ変えても，$f(x)$ の展開係数は x_k の変動に比べて，大きなものとはならない。

4. 除去可能な特異点の近傍における誤差消失．

関数 $f(x)$ が関数 $G(x)$，$H(x)$ によって， $f(x)=H(x)/G(x)$ のように表わされているとき，

$$(4.1)\qquad G(x)=(x-a)^n g(x)\ ,\quad H(x)=(x-a)^m h(x)$$

であって，$g(x)$，$h(x)$ は点 a の近傍で正則で $\lim_{x\to a} g(x)\neq 0$，$\lim_{x\to a} h(x)\neq 0$ とする。 このようなとき，点 a の近傍で $G(x)$，$H(x)$ の計算値の相対誤差は増大するのが常である。 極端な場合には，$G(x)$ も $H(x)$ も誤差ばかりと言うのはよくあることである。 このとき，$m\geqq n$ なら，点 a の近傍で $f(x)$ は意味のある関数であり，特に，$m=n$ なら，$f(x)$ の相対誤差は $G(x)$，$H(x)$ のそれより，はるかに小さくなることがある。 特に，$G(x)$，$H(x)$ の相対誤差増大の原因が $(x-a)^n$，$(x-a)^m$ に起因し，$g(x)$，$h(x)$ の相対誤

差が大きくないときに，そのようになる。

このような除去可能な特異点の近傍で誤差が消失すると言っても，計算が容易なわけではない。 $f(x)$ の損失桁数は $G(x)$ $H(x)$ の損失桁数の大きい方に一致する。 ところが，$G(x)$, $H(x)$ 共に，その多くは点 a の近傍で桁落ちによって0に近ずく。

よって，$f(x)$ の損失桁数は相当に大きい。 しかも，x が a に近ずけば近ずくほど大きくなる。 しかし，計算桁数を十分に取れば，x の誤差の影響を受けず，ほぼ損失桁数程度の正しい結果が得られる。

(A) <u>$y^{-1}(x^y-1)$ における誤差消失</u>

関数 $g(x,y)$ が

$$(4.2)\qquad g(x,y)=\frac{x^y-1}{y}$$

のような型になっていて，y は別の式から計算しなければならないとする。 誤差消失が起きるのは y が小さく，誤差ばかりのときである。 例えば，

$$(4.3)\qquad f(x,a,b)=\frac{x^{a-b}-1}{a-b}$$

と言う関数があって，$a \fallingdotseq b$ のために，分母 $a-b$ が桁落ちして，有効数値を失い，誤差ばかりになったとする。 このとき，x^{a-b} は有効数値を失なわず1に近くなり，分子 $x^{a-b}-1$ は

桁落ちして，有効数値を失う。 即ち，分母，分子共に有効数値を失い，誤差ばかりになるか，または誤差を多く含む.

従って，当然，$f(x, a, b)$ は誤差ばかりになるか，または誤差を多く含むように思える。 しかし，(4.2) 式を $y=0$ のまわりに展開すれば，

$$(4.4) \qquad g(x, y) = \log(x) + \frac{y}{2!}(\log(x))^2 + \frac{y^2}{3!}(\log(x))^3 + \cdots$$

となって，y が十分小さければ，(4.2) 式は y にあまり左右されない。 即ち，y が誤差ばかりであっても，関係ないわけである。

例えば，$M=10$，$L=5$ の計算で，$x=10$，$a=1.2345$，$b=1.2344$ とすれば，$\varepsilon = a-b = 0.0001$，$x^{\varepsilon} = 1.00023\cdots \fallingdotseq 1.0002$ であるから，

$$f(10, 1.2345, 1.2344) = \frac{1.0002-1.0000}{0.0001} = 2$$

となる。 a，b の誤差の程度は同じとして，$M=10$，$L=10$ で計算すれば，$x^{\varepsilon} = 1.0002302850\cdots \fallingdotseq 1.000230285$ であるから

$$f(10, 1.2345, 1.2344) = \frac{1.000230285-1.0}{0.0001} = 2.302850000$$

となる。 $a=b$ が正しい結果であったとすれば，$f(10, a, a) = \log_e 10 = 2.30258509299\cdots$ であるから，2.30285 はすべて誤差であるわけではなく，a，b の誤差の程度の誤差しか

含まないのである。 即ち，誤差消失が起きたのである．

このように，誤差が消失するのは十分な精度で計算するからであることに注意しなければならない． しかも，損失桁数がかなり大きいことに注意を払わねばならない。

(4.2)式の損失桁数は，次のように求められる。 (4.2)式の分子は $x^y = 1 + y\log(x) + \cdots$ から 1 を引く。 このとき桁落ちが起き，この桁数が損失桁数になる。 即ち，1 に対して，$y\log(x)$ がどれほどの大きさであるかと言うことであるから

$$(4.5) \qquad \left((4.2)\text{式の損失桁数} \right) = -\log_{M} |y \log(x)|$$

となる。 少なくともこれ以上の桁数で計算しなければ，誤差は消失しない。 また，y が誤差ばかりであれば，$g(x,y)$ の正しい値は (4.4)式の右辺の y 以上の項が y を含まない項，即ち，$\log(x)$ に対して，どの程度の大きさかで定まる． 従って，どんなに計算桁数を増しても，ほぼ (4.5)式と同じ程度の桁数しか求められない。 よって，(4.5)式の2倍の桁数で計算すれば，丁度半分の桁数が正しく求められることになる．

(B) <u>$\sin(x)/x$ における誤差消失</u>

関数 $f(x)$ が

$$(4.6) \qquad f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

のようになっていれば，$x=0$ は除去可能な特異点で，$f(0)=1.0$ と定義すればよい。

いま，分子 $\sin(x)$ と分母 x を別々に計算しなければならず，$|x|$ が小さくなって，誤差ばかりになったとする。即ち，

$$(4.7)\qquad f(x=a-b)=\frac{\sin(a-b)}{a-b},\quad a\fallingdotseq b$$

とする。このようなとき，分子の $\sin(a-b)$ も分母の $a-b$ も誤差ばかりとなり，$f(a-b)$ も誤差ばかりになるように見える。しかし，実際は計算桁数を十分に取れば，そのようにはならず，$f(a-b)$ はかなり正しく 1.0 となる。それは(4.6)式を $x=0$ のまわりに展開すれば，

$$f(x)=1.0-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\cdots$$

となるから，$x=0$ の近傍では，$f(x)$ は x の影響をあまり受けないからである。

5. 漸化式における誤差消失

漸化式における誤差消失についてはいろいろな結果が得られたが，ここでは Bessel 関数の計算の場合だけについて述べることにする。

漸化式

$$(5.1) \qquad Z_{n+1} = \frac{2n}{x} Z_n - Z_{n-1}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

により，$Z_0 = J_0(x)$, $Z_1 = J_1(x)$ とおいて，$Z_n \equiv J_n(x)$ を計算する場合を考える。 この場合の誤差についてはいろいろ知られており，$n \leqq |x|$ ならば，安定に計算でき，誤差は増大しない。 この安定に計算できるという理由が誤差の消失が起きるからであると考えるのである。 もし，誤差の消失が起きないならば，$|x|/2 < n \leqq |x|$ において，Z_n の誤差は拡大されて，Z_{n+1} へ伝播するはずである． ところが，$|Z_n|$, $|Z_{n-1}|$ に比べて，$|Z_{n+1}|$ もあまり大きくならないから，それらの相対誤差もあまり大きくならない。 これは，Z_n の誤差が $2n/x$ によって拡大されても，Z_{n-1} の誤差によって打消されるからであると考えることができる．

計算例を示す。 $x = 100$ とし，$Z_{69} = J_{69}(x) + \varepsilon_{69}$, $Z_{70} = J_{70}(x) + \varepsilon_{70}$ を初期値として，$n = 70$ から (5.1)式を実行した。 $\varepsilon_{69}, \varepsilon_{70}$ をいろいろ変えて実行してみたが，同じような傾向を示すので1例のみ第II.9表に示す。 表中の $J_n(x)$ は末尾が違う程度の値であり，Z_n は $M=2$, $L=26$, $u=2^{-26}$ で計算した． e_n は次のように求めた： $e'_n = 2(n-1)e_{n-1}/x - e_{n-2}$; $e_n = e'_n + \mathrm{sign}(e'_n)\{|2(n-1)Z_{n-1}/x| + |Z_{n-2}|\}u$ $n = 71, 72, \cdots, 120$; 但し $e_{69} = J_{69}(x) - Z_{69}$, $e_{70} = J_{70}(x) - Z_{70}$, $u = 2^{-26}$。

参考文献

1. 山下, $\sum_{i=1}^{n} x_i$ の精度判定とその応用, 電子協,NA資料, '64.
2. 山下,佐竹, 高次代数方程式の根の計算限界について, 情報処理, Vol.7, No.4, '66, P.197～201.
3. 山下, 有限桁計算における計算誤差と計算限界について, 京大数解研, 講究録153, '72, P.152～175.
4. 宇野, 誤差伝播の問題, 数学, Vol.15, No.1, '63, P.30～40.
5. 永坂, ある種の三項方程式における誤差伝播, 情報処理, Vol.5, No.4, '64, P.195～202.
6. 永坂, 数値計算中の情報喪失について, 京大数解研, 講究録153, '72, P.129～151.
7. J.H. Wilkinson, Error Analysis of Floating-point Computation, Num. Math., Vol.2, '60, P.319～340.
8. ――――, Rounding Error in Algebric Processes, Her Majesty's Stationary Office, '63.
9. M.A. Malcolm, On Accurate Floating-point Summation, Comm. of ACM, Vol.14, NO.11, '71, P.731～736.
10. Peter Linz, Accurate Floating-point Summation, Comm. of ACM, Vol.13, No.6, '70, P.361～362.
11. J.M. Wolfe, Reducing Trancation Error by Programming, Comm. of ACM, Vol.7, No.6, '64, P.355～356. (以上)

第I.1表 $\theta = 0.0100$, $M=2$, $L=26$, $u=2^{-26}$ の場合

n	y_n	y_n^*	$y_n - y_n^*$	A_n	B_n
250	2.94733196E-01	2.94733185E-01	1.141E-08	2.860E-04	2.688E-06
500	-4.81253013E-01	-4.81253031E-01	1.764E-08	1.161E-03	4.900E-06
750	4.67366569E-01	4.67366546E-01	2.311E-08	2.646E-03	6.941E-06
1000	-2.76608214E-01	-2.76608245E-01	3.079E-08	4.741E-03	9.185E-06
1250	-3.31664477E-02	-3.31664784E-02	3.079E-08	7.423E-03	1.192E-05
1500	3.20744589E-01	3.20744557E-01	3.149E-08	1.067E-02	1.455E-05
1750	-4.89764541E-01	-4.89764581E-01	3.952E-08	1.451E-02	1.673E-05
2000	4.54992689E-01	4.54992647E-01	4.195E-08	1.896E-02	1.877E-05
2250	-2.48270713E-01	-2.48270765E-01	5.207E-08	2.403E-02	2.105E-05
2500	-6.61980882E-02	-6.61981403E-02	5.207E-08	2.967E-02	2.383E-05
2750	3.45332503E-01	3.45332444E-01	5.941E-08	3.588E-02	2.640E-05
3000	-4.96130541E-01	-4.96130605E-01	6.372E-08	4.269E-02	2.855E-05
3250	4.40604195E-01	4.40604131E-01	6.406E-08	5.011E-02	3.060E-05
3500	-2.18850933E-01	-2.18850998E-01	6.511E-08	5.813E-02	3.293E-05
3750	-9.89490375E-02	-9.89491101E-02	7.256E-08	6.674E-02	3.574E-05
4000	3.68388966E-01	3.68388879E-01	8.643E-08	7.591E-02	3.825E-05
4250	-5.00322551E-01	-5.00322647E-01	9.647E-08	8.569E-02	4.037E-05
4500	4.24264863E-01	4.24264763E-01	1.002E-07	9.607E-02	4.244E-05
4750	-1.88478116E-01	-1.88478219E-01	1.033E-07	1.071E-01	4.481E-05
5000	-1.31275304E-01	-1.31275418E-01	1.145E-07	1.186E-01	4.763E-05
5250	3.89812171E-01	3.89812046E-01	1.254E-07	1.308E-01	5.010E-05
5500	-5.02322614E-01	-5.02322748E-01	1.334E-07	1.435E-01	5.220E-05
5750	4.06045936E-01	4.06045798E-01	1.380E-07	1.569E-01	5.428E-05
6000	-1.57286838E-01	-1.57286983E-01	1.456E-07	1.708E-01	5.670E-05
6250	-1.63034543E-01	-1.63034689E-01	1.456E-07	1.854E-01	5.953E-05
6500	4.09507811E-01	4.09507662E-01	1.495E-07	2.005E-01	6.194E-05
6750	-5.02121821E-01	-5.02121977E-01	1.558E-07	2.162E-01	6.402E-05
7000	3.86028178E-01	3.86028016E-01	1.621E-07	2.325E-01	6.612E-05
7250	-1.25413585E-01	-1.25413757E-01	1.712E-07	2.494E-01	6.859E-05
7500	-1.94086872E-01	-1.94087054E-01	1.824E-07	2.669E-01	7.141E-05
7750	4.27389130E-01	4.27388944E-01	1.859E-07	2.850E-01	7.378E-05
8000	-4.99720879E-01	-4.99721069E-01	1.900E-07	3.036E-01	7.584E-05
8250	3.64299454E-01	3.64299253E-01	2.006E-07	3.229E-01	7.796E-05
8500	-9.29993968E-02	-9.29996065E-02	2.096E-07	3.428E-01	8.049E-05
8750	-2.24295735E-01	-2.24295958E-01	2.227E-07	3.633E-01	8.329E-05
9000	4.43377510E-01	4.43377282E-01	2.275E-07	3.843E-01	8.561E-05
9250	-4.95130405E-01	-4.95130638E-01	2.336E-07	4.060E-01	8.766E-05
9500	3.40955749E-01	3.40955515E-01	2.338E-07	4.282E-01	8.982E-05
9750	-6.01863526E-02	-6.01865868E-02	2.343E-07	4.511E-01	9.240E-05
10000	-2.53527462E-01	-2.53527708E-01	2.454E-07	4.745E-01	9.517E-05

第 I.2 表 $\theta = 0.1000$, $M=2$, $L=26$, $U=2^{--}$ の場合

n	y_n	y_n^*	$y_n - y_n^*$	A_n	B_n
250	-6.63960017E-02	-6.63960492E-02	4.750E-08	2.988E-04	2.387E-06
500	-1.32063910E-01	-1.32064023E-01	1.123E-07	1.191E-03	4.771E-06
750	-1.95848525E-01	-1.95848682E-01	1.575E-07	2.675E-03	7.153E-06
1000	-2.56627545E-01	-2.56627773E-01	2.285E-07	4.753E-03	9.532E-06
1250	-3.13331604E-01	-3.13331909E-01	3.045E-07	7.423E-03	1.191E-05
1500	-3.64962980E-01	-3.64963327E-01	3.473E-07	1.069E-02	1.428E-05
1750	-4.10613388E-01	-4.10613772E-01	3.842E-07	1.454E-02	1.666E-05
2000	-4.49479446E-01	-4.49479879E-01	4.333E-07	1.899E-02	1.903E-05
2250	-4.80877429E-01	-4.80877918E-01	4.888E-07	2.403E-02	2.140E-05
2500	-5.04254729E-01	-5.04255277E-01	5.480E-07	2.967E-02	2.377E-05
2750	-5.19200355E-01	-5.19200941E-01	5.861E-07	3.590E-02	2.613E-05
3000	-5.25451228E-01	-5.25451857E-01	6.285E-07	4.272E-02	2.850E-05
3250	-5.22897243E-01	-5.22897917E-01	6.739E-07	5.013E-02	3.087E-05
3500	-5.11583507E-01	-5.11584208E-01	7.011E-07	5.814E-02	3.324E-05
3750	-4.91708890E-01	-4.91709635E-01	7.449E-07	6.674E-02	3.560E-05
4000	-4.63623211E-01	-4.63624025E-01	8.144E-07	7.593E-02	3.797E-05
4250	-4.27820601E-01	-4.27821450E-01	8.496E-07	8.572E-02	4.034E-05
4500	-3.84930909E-01	-3.84931820E-01	9.113E-07	9.610E-02	4.272E-05
4750	-3.35708864E-01	-3.35709815E-01	9.514E-07	1.071E-01	4.509E-05
5000	-2.81020455E-01	-2.81021469E-01	1.014E-06	1.186E-01	4.747E-05
5250	-2.21827861E-01	-2.21828942E-01	1.081E-06	1.308E-01	4.984E-05
5500	-1.59172494E-01	-1.59173629E-01	1.135E-06	1.435E-01	5.222E-05
5750	-9.41567719E-02	-9.41579729E-02	1.201E-06	1.569E-01	5.461E-05
6000	-2.79247100E-02	-2.79259548E-02	1.245E-06	1.708E-01	5.699E-05
6250	3.83583605E-02	3.83570521E-02	1.308E-06	1.854E-01	5.938E-05
6500	1.03526458E-01	1.03525114E-01	1.344E-06	2.005E-01	6.176E-05
6750	1.66432798E-01	1.66431390E-01	1.408E-06	2.162E-01	6.414E-05
7000	2.25970760E-01	2.25969287E-01	1.473E-06	2.325E-01	6.652E-05
7250	2.81092688E-01	2.81091150E-01	1.538E-06	2.494E-01	6.890E-05
7500	3.30828622E-01	3.30827054E-01	1.568E-06	2.669E-01	7.127E-05
7750	3.74303699E-01	3.74302088E-01	1.610E-06	2.850E-01	7.364E-05
8000	4.10753116E-01	4.10751448E-01	1.669E-06	3.037E-01	7.602E-05
8250	4.39535290E-01	4.39533543E-01	1.747E-06	3.230E-01	7.838E-05
8500	4.60144013E-01	4.60142192E-01	1.822E-06	3.428E-01	8.075E-05
8750	4.72216561E-01	4.72214663E-01	1.899E-06	3.633E-01	8.312E-05
9000	4.75540504E-01	4.75538544E-01	1.960E-06	3.843E-01	8.549E-05
9250	4.70057487E-01	4.70055482E-01	2.005E-06	4.060E-01	8.786E-05
9500	4.55863893E-01	4.55861817E-01	2.076E-06	4.282E-01	9.022E-05
9750	4.33209404E-01	4.33207288E-01	2.117E-06	4.511E-01	9.259E-05
10000	4.02492657E-01	4.02490515E-01	2.142E-06	4.745E-01	9.496E-05

第I.3表　$\theta = 0.9000$, $M = 2$, $L = 26$, $u = 2^{-26}$ の場合

n	y_n	y_n^*	$y_n - y_n^*$	A_n	B_n
250	-6.17856994E-01	-6.17857182E-01	1.877E-07	2.987E-04	2.636E-06
500	-7.59520873E-01	-7.59521353E-01	4.799E-07	1.190E-03	5.262E-06
750	-2.45735541E-01	-2.45736217E-01	6.760E-07	2.675E-03	7.896E-06
1000	2.73375422E-01	2.73374510E-01	9.119E-07	4.753E-03	1.052E-05
1250	1.40949331E-01	1.40948221E-01	1.111E-06	7.423E-03	1.315E-05
1500	-4.75446612E-01	-4.75447978E-01	1.367E-06	1.069E-02	1.578E-05
1750	-7.95848653E-01	-7.95850214E-01	1.561E-06	1.454E-02	1.841E-05
2000	-4.14832145E-01	-4.14833889E-01	1.744E-06	1.899E-02	2.104E-05
2250	1.85479641E-01	1.85477670E-01	1.971E-06	2.403E-02	2.367E-05
2500	2.45475635E-01	2.45473512E-01	2.123E-06	2.967E-02	2.630E-05
2750	-3.10760632E-01	-3.10762938E-01	2.306E-06	3.590E-02	2.893E-05
3000	-7.79389009E-01	-7.79391527E-01	2.518E-06	4.272E-02	3.156E-05
3250	-5.67425057E-01	-5.67427783E-01	2.726E-06	5.013E-02	3.418E-05
3500	5.69204688E-02	5.69175524E-02	2.916E-06	5.814E-02	3.682E-05
3750	3.03625278E-01	3.03622158E-01	3.120E-06	6.674E-02	3.944E-05
4000	-1.39481127E-01	-1.39484434E-01	3.307E-06	7.593E-02	4.207E-05
4250	-7.11708724E-01	-7.11712253E-01	3.528E-06	8.572E-02	4.471E-05
4500	-6.88982725E-01	-6.88986472E-01	3.747E-06	9.610E-02	4.733E-05
4750	-1.00059405E-01	-1.00063303E-01	3.898E-06	1.071E-01	4.997E-05
5000	3.09860721E-01	3.09856591E-01	4.130E-06	1.186E-01	5.260E-05
5250	2.20809020E-02	2.20765429E-02	4.359E-06	1.308E-01	5.521E-05
5500	-5.99253178E-01	-5.99257710E-01	4.533E-06	1.435E-01	5.785E-05
5750	-7.67929062E-01	-7.67933794E-01	4.732E-06	1.569E-01	6.048E-05
6000	-2.70510562E-01	-2.70515493E-01	4.931E-06	1.708E-01	6.311E-05
6250	2.63588428E-01	2.63583294E-01	5.135E-06	1.854E-01	6.574E-05
6500	1.58539981E-01	1.58534631E-01	5.350E-06	2.005E-01	6.837E-05
6750	-4.52731371E-01	-4.52736956E-01	5.585E-06	2.162E-01	7.100E-05
7000	-7.96746463E-01	-7.96752227E-01	5.765E-06	2.325E-01	7.363E-05
7250	-4.38201629E-01	-4.38207582E-01	5.953E-06	2.494E-01	7.626E-05
7500	1.69214651E-01	1.69208474E-01	6.177E-06	2.669E-01	7.888E-05
7750	2.56901510E-01	2.56895170E-01	6.340E-06	2.850E-01	8.151E-05
8000	-2.86096290E-01	-2.86102856E-01	6.566E-06	3.037E-01	8.414E-05
8250	-7.72690222E-01	-7.72696979E-01	6.757E-06	3.230E-01	8.678E-05
8500	-5.87162793E-01	-5.87169768E-01	6.976E-06	3.428E-01	8.940E-05
8750	3.57269496E-02	3.57197797E-02	7.170E-06	3.633E-01	9.204E-05
9000	3.07798758E-01	3.07791415E-01	7.343E-06	3.843E-01	9.466E-05
9250	-1.15216274E-01	-1.15223772E-01	7.498E-06	4.060E-01	9.729E-05
9500	-6.98051035E-01	-6.98058732E-01	7.697E-06	4.282E-01	9.993E-05
9750	-7.03208804E-01	-7.03216708E-01	7.904E-06	4.511E-01	1.025E-04
10000	-1.24162778E-01	-1.24170915E-01	8.137E-06	4.745E-01	1.052E-04

176

第I.4表 $\theta = 1.0000$, $M=2$, $L=26$, $u=2^{-26}$ の場合

n	y_n	y_n^*	$y_n - y_n^*$	A_n	B_n
250	-6.92588776E-01	-6.92588997E-01	2.207E-07	2.988E-04	2.708E-06
500	-7.48461291E-01	-7.48461734E-01	4.426E-07	1.190E-03	5.387E-06
750	-8.28013718E-02	-8.28020570E-02	6.852E-07	2.675E-03	8.101E-06
1000	2.93903798E-01	2.93902961E-01	8.366E-07	4.753E-03	1.079E-05
1250	-1.90192595E-01	-1.90193693E-01	1.098E-06	7.423E-03	1.347E-05
1500	-8.00220743E-01	-8.00222050E-01	1.307E-06	1.069E-02	1.619E-05
1750	-6.10143349E-01	-6.10144837E-01	1.488E-06	1.454E-02	1.887E-05
2000	9.14980769E-02	9.14963840E-02	1.693E-06	1.899E-02	2.157E-05
2250	2.39595629E-01	2.39593688E-01	1.942E-06	2.403E-02	2.427E-05
2500	-3.90665904E-01	-3.90668016E-01	2.112E-06	2.967E-02	2.695E-05
2750	-8.42534423E-01	-8.42536777E-01	2.354E-06	3.590E-02	2.966E-05
3000	-4.30062659E-01	-4.30065246E-01	2.586E-06	4.272E-02	3.235E-05
3250	2.20607817E-01	2.20604998E-01	2.819E-06	5.013E-02	3.504E-05
3500	1.21744372E-01	1.21741338E-01	3.034E-06	5.814E-02	3.775E-05
3750	-5.76575711E-01	-5.76578985E-01	3.273E-06	6.674E-02	4.044E-05
4000	-8.14285964E-01	-8.14289404E-01	3.440E-06	7.593E-02	4.312E-05
4250	-2.30536327E-01	-2.30539999E-01	3.672E-06	8.572E-02	4.584E-05
4500	2.88527846E-01	2.88523962E-01	3.884E-06	9.610E-02	4.852E-05
4750	-4.50446624E-02	-4.50487254E-02	4.063E-06	1.071E-01	5.121E-05
5000	-7.24882737E-01	-7.24887005E-01	4.268E-06	1.186E-01	5.392E-05
5250	-7.18975991E-01	-7.18980479E-01	4.488E-06	1.308E-01	5.660E-05
5500	-3.62906605E-02	-3.62953660E-02	4.705E-06	1.435E-01	5.931E-05
5750	2.86841162E-01	2.86836244E-01	4.918E-06	1.569E-01	6.200E-05
6000	-2.40101762E-01	-2.40106913E-01	5.151E-06	1.708E-01	6.469E-05
6250	-8.17207456E-01	-8.17212830E-01	5.374E-06	1.854E-01	6.740E-05
6500	-5.68415627E-01	-5.68421221E-01	5.594E-06	2.005E-01	7.008E-05
6750	1.28602281E-01	1.28596493E-01	5.788E-06	2.162E-01	7.278E-05
7000	2.15757027E-01	2.15751019E-01	6.008E-06	2.325E-01	7.548E-05
7250	-4.39253926E-01	-4.39260145E-01	6.219E-06	2.494E-01	7.817E-05
7500	-8.42108428E-01	-8.42114856E-01	6.428E-06	2.669E-01	8.087E-05
7750	-3.81263539E-01	-3.81270188E-01	6.649E-06	2.850E-01	8.357E-05
8000	2.43707746E-01	2.43700909E-01	6.838E-06	3.037E-01	8.626E-05
8250	8.40848088E-02	8.40777333E-02	7.076E-06	3.229E-01	8.896E-05
8500	-6.17820680E-01	-6.17827990E-01	7.310E-06	3.428E-01	9.165E-05
8750	-7.96499297E-01	-7.96506909E-01	7.612E-06	3.633E-01	9.434E-05
9000	-1.80712342E-01	-1.80720234E-01	7.892E-06	3.843E-01	9.705E-05
9250	2.94761539E-01	2.94753429E-01	8.110E-06	4.060E-01	9.974E-05
9500	-9.18575898E-02	-9.18659536E-02	8.364E-06	4.282E-01	1.024E-04
9750	-7.53672570E-01	-7.53681184E-01	8.614E-06	4.511E-01	1.051E-04
10000	-6.86032310E-01	-6.86041172E-01	8.862E-06	4.745E-01	1.078E-04

第 I.5 表　$\theta = 1.3000$, $M=2$, $L=26$, $u=2^{-26}$ の場合

n	y_n	y_n^*	$y_n - y_n^*$	A_n	B_n
250	-9.32740182E-01	-9.32740401E-01	2.190E-07	2.986E-04	2.959E-06
500	-5.89746445E-01	-5.89746873E-01	4.281E-07	1.190E-03	5.919E-06
750	2.37200052E-01	2.37199483E-01	5.682E-07	2.674E-03	8.878E-06
1000	-3.60859275E-01	-3.60860019E-01	7.443E-07	4.750E-03	1.183E-05
1250	-1.00333777E 00	-1.00333877E 00	9.957E-07	7.420E-03	1.479E-05
1500	-2.07109809E-01	-2.07111013E-01	1.204E-06	1.068E-02	1.775E-05
1750	1.89778060E-01	1.89776596E-01	1.463E-06	1.454E-02	2.071E-05
2000	-7.28866920E-01	-7.28868661E-01	1.741E-06	1.899E-02	2.367E-05
2250	-8.42404291E-01	-8.42406270E-01	1.979E-06	2.403E-02	2.663E-05
2500	1.11261040E-01	1.11258827E-01	2.213E-06	2.967E-02	2.959E-05
2750	-6.93527833E-02	-6.93552970E-02	2.514E-06	3.590E-02	3.254E-05
3000	-9.67308477E-01	-9.67311217E-01	2.740E-06	4.272E-02	3.550E-05
3250	-5.09725749E-01	-5.09728698E-01	2.949E-06	5.013E-02	3.846E-05
3500	2.47091964E-01	2.47088877E-01	3.087E-06	5.814E-02	4.141E-05
3750	-4.43925798E-01	-4.43928967E-01	3.169E-06	6.674E-02	4.437E-05
4000	-9.87603277E-01	-9.87606709E-01	3.432E-06	7.593E-02	4.733E-05
4250	-1.28891319E-01	-1.28894989E-01	3.670E-06	8.572E-02	5.029E-05
4500	1.49922743E-01	1.49918804E-01	3.939E-06	9.610E-02	5.324E-05
4750	-7.94786781E-01	-7.94791045E-01	4.264E-06	1.071E-01	5.620E-05
5000	-7.82211021E-01	-7.82215481E-01	4.461E-06	1.186E-01	5.916E-05
5250	1.58620134E-01	1.58615571E-01	4.563E-06	1.308E-01	6.212E-05
5500	-1.44148327E-01	-1.44153155E-01	4.828E-06	1.435E-01	6.507E-05
5750	-9.91592214E-01	-9.91597279E-01	5.065E-06	1.569E-01	6.803E-05
6000	-4.27434787E-01	-4.27440122E-01	5.334E-06	1.708E-01	7.099E-05
6250	2.45999008E-01	2.45993456E-01	5.552E-06	1.854E-01	7.395E-05
6500	-5.25874093E-01	-5.25879871E-01	5.778E-06	2.005E-01	7.690E-05
6750	-9.61228371E-01	-9.61234355E-01	5.985E-06	2.162E-01	7.986E-05
7000	-5.50726801E-02	-5.50786403E-02	6.160E-06	2.325E-01	8.282E-05
7250	1.00784473E-01	1.00778072E-01	6.401E-06	2.494E-01	8.577E-05
7500	-8.53443727E-01	-8.53450340E-01	6.613E-06	2.669E-01	8.873E-05
7750	-7.14974940E-01	-7.14981752E-01	6.812E-06	2.850E-01	9.169E-05
8000	1.96543947E-01	1.96536952E-01	6.995E-06	3.037E-01	9.465E-05
8250	-2.23076202E-01	-2.23083456E-01	7.254E-06	3.229E-01	9.760E-05
8500	-1.00516567E 00	-1.00517308E 00	7.418E-06	3.428E-01	1.006E-04
8750	-3.44314650E-01	-3.44322352E-01	7.702E-06	3.633E-01	1.035E-04
9000	2.33940199E-01	2.33932180E-01	8.019E-06	3.843E-01	1.065E-04
9250	-6.05269179E-01	-6.05277344E-01	8.165E-06	4.060E-01	1.094E-04
9500	-9.24675032E-01	-9.24683489E-01	8.457E-06	4.282E-01	1.124E-04
9750	1.30533576E-02	1.30446852E-02	8.672E-06	4.511E-01	1.154E-04
10000	4.32236325E-02	4.32147324E-02	8.900E-06	4.745E-01	1.183E-04

第I.6表　$\theta = 1.5700$, $M=2$, $L=26$, $u=2^{-26}$ の場合

n	y_n	y_n^*	$y_n - y_n^*$	A_n	B_n
250	-8.90451521E-01	-8.90451631E-01	1.107E-07	2.495E-04	2.974E-06
500	-2.32944138E-01	-2.32944663E-01	5.242E-07	1.046E-03	6.222E-06
750	-6.31532773E-01	-6.31533745E-01	9.712E-07	2.451E-03	9.682E-06
1000	-5.07606521E-01	-5.07607939E-01	1.418E-06	4.500E-03	1.322E-05
1250	-3.51973131E-01	-3.51974967E-01	1.835E-06	7.206E-03	1.678E-05
1500	-7.81016499E-01	-7.81018811E-01	2.312E-06	1.055E-02	2.020E-05
1750	-9.55099016E-02	-9.55126312E-02	2.730E-06	1.450E-02	2.344E-05
2000	-1.01039895E 00	-1.01040182E 00	2.870E-06	1.899E-02	2.636E-05
2250	9.77326334E-02	9.77295523E-02	3.081E-06	2.398E-02	2.937E-05
2500	-1.15986642E 00	-1.15986987E 00	3.446E-06	2.951E-02	3.265E-05
2750	1.97522759E-01	1.97518829E-01	3.930E-06	3.567E-02	3.612E-05
3000	-1.20603406E 00	-1.20603846E 00	4.392E-06	4.247E-02	3.967E-05
3250	1.88247904E-01	1.88243095E-01	4.810E-06	4.992E-02	4.321E-05
3500	-1.14167964E 00	-1.14168481E 00	5.167E-06	5.802E-02	4.662E-05
3750	7.13587627E-02	7.13531857E-02	5.577E-06	6.671E-02	4.982E-05
4000	-9.76871222E-01	-9.76876829E-01	5.607E-06	7.593E-02	5.273E-05
4250	-1.34856932E-01	-1.34862802E-01	5.871E-06	8.565E-02	5.576E-05
4500	-7.37392351E-01	-7.37398698E-01	6.347E-06	9.593E-02	5.908E-05
4750	-3.98135781E-01	-3.98142583E-01	6.802E-06	1.068E-01	6.255E-05
5000	-4.60709915E-01	-4.60717268E-01	7.353E-06	1.184E-01	6.612E-05
5250	-6.77287996E-01	-6.77295781E-01	7.785E-06	1.306E-01	6.964E-05
5500	-1.90111220E-01	-1.90119460E-01	8.240E-06	1.434E-01	7.304E-05
5750	-9.28640142E-01	-9.28648844E-01	8.702E-06	1.569E-01	7.620E-05
6000	3.20682079E-02	3.20595039E-02	8.704E-06	1.708E-01	7.910E-05
6250	-1.11286807E 00	-1.11287714E 00	9.065E-06	1.853E-01	8.217E-05
6500	1.71069190E-01	1.71059767E-01	9.423E-06	2.003E-01	8.550E-05
6750	-1.20114821E 00	-1.20115813E 00	9.922E-06	2.160E-01	8.899E-05
7000	2.05144763E-01	2.05134379E-01	1.038E-05	2.323E-01	9.255E-05
7250	-1.17966947E 00	-1.17968035E 00	1.088E-05	2.492E-01	9.607E-05
7500	1.28963768E-01	1.28952416E-01	1.135E-05	2.668E-01	9.945E-05
7750	-1.05179223E 00	-1.05180384E 00	1.161E-05	2.850E-01	1.026E-04
8000	-4.55555692E-02	-4.55673091E-02	1.174E-05	3.037E-01	1.055E-04
8250	-8.37522909E-01	-8.37534874E-01	1.197E-05	3.229E-01	1.086E-04
8500	-2.91108309E-01	-2.91121244E-01	1.243E-05	3.426E-01	1.119E-04
8750	-5.70383400E-01	-5.70396311E-01	1.291E-05	3.630E-01	1.154E-04
9000	-5.69278628E-01	-5.69292061E-01	1.343E-05	3.841E-01	1.190E-04
9250	-2.92167976E-01	-2.92181827E-01	1.385E-05	4.058E-01	1.225E-04
9500	-8.36545631E-01	-8.36559936E-01	1.430E-05	4.281E-01	1.259E-04
9750	-4.64038700E-02	-4.64185416E-02	1.467E-05	4.510E-01	1.290E-04
10000	-1.05109572E 00	-1.05111054E 00	1.482E-05	4.745E-01	1.318E-04

第1.7表 $\theta = 2.0000$, $M=2$, $L=26$, $u=2^{-26}$ の場合

n	y_n	y_n^*	$y_n - y_n^*$	A_n	B_n
250	-1.70084628E 00	-1.70084664E 00	3.530E-07	2.986E-04	4.223E-06
500	7.26635754E-02	7.26626264E-02	9.490E-07	1.190E-03	8.458E-06
750	-1.36151907E 00	-1.36152060E 00	1.529E-06	2.675E-03	1.265E-05
1000	-5.99824384E-01	-5.99826427E-01	2.044E-06	4.753E-03	1.689E-05
1250	-5.12086347E-01	-5.12088990E-01	2.644E-06	7.423E-03	2.110E-05
1500	-1.42887333E 00	-1.42887649E 00	3.159E-06	1.069E-02	2.531E-05
1750	1.03993736E-01	1.03990015E-01	3.721E-06	1.454E-02	2.953E-05
2000	-1.68886417E 00	-1.68886847E 00	4.300E-06	1.899E-02	3.376E-05
2250	-5.24969399E-02	-5.25017313E-02	4.791E-06	2.403E-02	3.797E-05
2500	-1.15224087E 00	-1.15224634E 00	5.469E-06	2.967E-02	4.218E-05
2750	-8.44590023E-01	-8.44596004E-01	5.981E-06	3.590E-02	4.643E-05
3000	-2.88677834E-01	-2.88684364E-01	6.530E-06	4.272E-02	5.061E-05
3250	-1.57901192E 00	-1.57901898E 00	7.061E-06	5.013E-02	5.485E-05
3500	1.45999327E-01	1.45991826E-01	7.501E-06	5.814E-02	5.907E-05
3750	-1.61296478E 00	-1.61297277E 00	7.995E-06	6.674E-02	6.327E-05
4000	-2.28655875E-01	-2.28664508E-01	8.634E-06	7.593E-02	6.752E-05
4250	-9.16730940E-01	-9.16739840E-01	8.900E-06	8.572E-02	7.171E-05
4500	-1.08472928E 00	-1.08473863E 00	9.346E-06	9.610E-02	7.594E-05
4750	-9.96822640E-02	-9.96922187E-02	9.955E-06	1.071E-01	8.016E-05
5000	-1.67294815E 00	-1.67295857E 00	1.042E-05	1.186E-01	8.437E-05
5250	1.23066440E-01	1.23055577E-01	1.086E-05	1.308E-01	8.859E-05
5500	-1.47847834E 00	-1.47848983E 00	1.149E-05	1.435E-01	9.282E-05
5750	-4.43442583E-01	-4.43454578E-01	1.199E-05	1.569E-01	9.703E-05
6000	-6.71526939E-01	-6.71539461E-01	1.252E-05	1.708E-01	1.012E-04
6250	-1.30337626E 00	-1.30338935E 00	1.309E-05	1.854E-01	1.055E-04
6500	4.16292083E-02	4.16156929E-02	1.352E-05	2.005E-01	1.097E-04
6750	-1.70408362E 00	-1.70409790E 00	1.428E-05	2.162E-01	1.139E-04
7000	3.68071198E-02	3.67921608E-02	1.496E-05	2.325E-01	1.181E-04
7250	-1.29484788E 00	-1.29486341E 00	1.553E-05	2.494E-01	1.223E-04
7500	-6.81771874E-01	-6.81788047E-01	1.617E-05	2.669E-01	1.266E-04
7750	-4.33848359E-01	-4.33865011E-01	1.665E-05	2.850E-01	1.308E-04
8000	-1.48517638E 00	-1.48519347E 00	1.709E-05	3.037E-01	1.350E-04
8250	1.25333227E-01	1.25315456E-01	1.777E-05	3.229E-01	1.392E-04
8500	-1.67023224E 00	-1.67025047E 00	1.823E-05	3.428E-01	1.434E-04
8750	-1.06721550E-01	-1.06740345E-01	1.879E-05	3.633E-01	1.477E-04
9000	-1.07496992E 00	-1.07498922E 00	1.930E-05	3.843E-01	1.519E-04
9250	-9.26907584E-01	-9.26927388E-01	1.980E-05	4.060E-01	1.561E-04
9500	-2.20386975E-01	-2.20407314E-01	2.034E-05	4.282E-01	1.603E-04
9750	-1.61736289E 00	-1.61738380E 00	2.091E-05	4.511E-01	1.645E-04
10000	1.45550743E-01	1.45529256E-01	2.149E-05	4.745E-01	1.687E-04

第I.8表 $\theta = 3.0000$, $M=2$, $L=26$, $U=2^{-26}$ の場合

n	y_n	y_n^*	$y_n - y_n^*$	A_n	B_n
250	-1.13808758E 01	-1.13808771E 01	1.270E-06	2.987E-04	2.809E-05
500	-8.32512283E 00	-8.32512449E 00	1.662E-06	1.190E-03	5.424E-05
750	-1.02051231E 00	-1.02051740E 00	5.091E-06	2.675E-03	8.281E-05
1000	-1.38203630E 01	-1.38203672E 01	4.193E-06	4.753E-03	1.101E-04
1250	-4.05040431E 00	-4.05041040E 00	6.092E-06	7.423E-03	1.366E-04
1500	-4.28334486E 00	-4.28335067E 00	5.801E-06	1.069E-02	1.655E-04
1750	-1.37425659E 01	-1.37425732E 01	7.330E-06	1.454E-02	1.920E-04
2000	-8.91342819E-01	-8.91352025E-01	9.206E-06	1.899E-02	2.193E-04
2250	-8.57521033E 00	-8.57522120E 00	1.087E-05	2.403E-02	2.479E-04
2500	-1.11764100E 01	-1.11764225E 01	1.258E-05	2.967E-02	2.740E-04
2750	-2.26262063E-02	-2.26393729E-02	1.317E-05	3.590E-02	3.021E-04
3000	-1.23001933E 01	-1.23002051E 01	1.179E-05	4.272E-02	3.300E-04
3250	-7.07611942E 00	-7.07613335E 00	1.393E-05	5.013E-02	3.562E-04
3500	-1.76728693E 00	-1.76730132E 00	1.439E-05	5.814E-02	3.849E-04
3750	-1.40731597E 01	-1.40731742E 01	1.451E-05	6.674E-02	4.119E-04
4000	-2.96637499E 00	-2.96639062E 00	1.563E-05	7.593E-02	4.387E-04
4250	-5.47657228E 00	-5.47658913E 00	1.685E-05	8.572E-02	4.675E-04
4500	-1.32348368E 01	-1.32348533E 01	1.645E-05	9.610E-02	4.939E-04
4750	-3.75376739E-01	-3.75394182E-01	1.744E-05	1.071E-01	5.214E-04
5000	-9.77119231E 00	-9.77121034E 00	1.802E-05	1.186E-01	5.498E-04
5250	-1.00969512E 01	-1.00969701E 01	1.883E-05	1.308E-01	5.759E-04
5500	-2.66581662E-01	-2.66601319E-01	1.966E-05	1.435E-01	6.043E-04
5750	-1.30541985E 01	-1.30542189E 01	2.040E-05	1.569E-01	6.319E-04
6000	-5.82631969E 00	-5.82634102E 00	2.132E-05	1.708E-01	6.582E-04
6250	-2.68044335E 00	-2.68046655E 00	2.321E-05	1.854E-01	6.870E-04
6500	-1.41048105E 01	-1.41048341E 01	2.359E-05	2.005E-01	7.138E-04
6750	-2.01096618E 00	-2.01099131E 00	2.513E-05	2.162E-01	7.408E-04
7000	-6.71937180E 00	-6.71939855E 00	2.675E-05	2.325E-01	7.695E-04
7250	-1.25323584E 01	-1.25323864E 01	2.800E-05	2.494E-01	7.958E-04
7500	-6.96214344E-02	-6.96513458E-02	2.991E-05	2.669E-01	8.235E-04
7750	-1.08814955E 01	-1.08815280E 01	3.249E-05	2.850E-01	8.517E-04
8000	-8.92155409E 00	-8.92158765E 00	3.357E-05	3.037E-01	8.779E-04
8250	-7.24169150E-01	-7.24204835E-01	3.569E-05	3.229E-01	9.064E-04
8500	-1.36191387E 01	-1.36191751E 01	3.636E-05	3.428E-01	9.337E-04
8750	-4.61506760E 00	-4.61510666E 00	3.906E-05	3.633E-01	9.602E-04
9000	-3.73121697E 00	-3.73125734E 00	4.037E-05	3.843E-01	9.890E-04
9250	-1.39143093E 01	-1.39143507E 01	4.144E-05	4.060E-01	1.016E-03
9500	-1.21425760E 00	-1.21430005E 00	4.246E-05	4.282E-01	1.043E-03
9750	-7.97259772E 00	-7.97264195E 00	4.423E-05	4.511E-01	1.071E-03
10000	-1.16572480E 01	-1.16572945E 01	4.647E-05	4.745E-01	1.098E-03

第Ⅲ.1表　$x=20$ に対する $\sin(x)$ の各項の値

n	$T_n^* = (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$S_n^* = \sum_{k=0}^{n} T_k^*$
0	20.000000000000000	20.000000000000000
1	-1333.333333333333333	-1313.333333333333333
2	26666.666666666666667	25353.333333333333333
3	-253968.253968253968254	-228614.920634920634921
4	1410934.744268077601411	1182319.823633156966490
5	-5130671.797338464005131	-3948351.973705307038640
6	13155568.711124266679822	9207216.737418959641182
7	-25058226.116427174628233	-15851009.379008214987051
8	36850332.524157609747401	20999323.145149394760350
9	-43099804.121821765786434	-22100480.976672371026084
10	41047432.496973110272794	18946951.520300739246711
11	-32448563.238713921164264	-13501611.718413181917554
12	21632375.492475947442843	8130763.774062765525289
13	-12326139.881752676605609	-4195376.107689911080319
14	6071990.089533338229364	1876613.981843427149044
15	-2611608.640659500313705	-734994.658816073164660
16	989245.697219507694585	254251.038403434529925
17	-332519.562090590821709	-78268.523687156291785
18	99855.724351528775288	21587.200664372483503
19	-26951.612510534082399	-5364.411846161598895
20	6573.564026959532292	1209.152180797933397
21	-1455.938876402997185	-246.786695605063789
22	294.129065939999431	47.342370334935643
23	-54.417958545790829	-7.075588210855186
24	9.254754854726331	2.179166643871145
25	-1.451726251721777	0.727440392149368
26	0.210700471948008	0.938140864097376
27	-0.028377167939126	0.909763696158250
28	0.003556036082597	0.913319732240848
29	-0.000415667572484	0.912904064668364
30	0.000045428149998	0.912949492818362
31	-0.000004652140297	0.912944840678065
32	0.000000447321182	0.912945287999248
33	-0.000000040463246	0.912945247536002
34	0.000000003449552	0.912945250985554
35	-0.000000000277630	0.912945250707924
36	0.000000000021129	0.912945250729053
37	-0.000000000001523	0.912945250727530
38	0.000000000000104	0.912945250727634
39	-0.000000000000007	0.912945250727627
40	0.000000000000000	0.912945250727628

第Ⅱ.2表　$x=20,\ \varepsilon=10^{-8}$ に対する $\sin(x+\varepsilon)$ の各項の値

n	$T_n=(-1)^n\dfrac{(x+\varepsilon)^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$S_n=\sum_{k=0}^{n}T_k$	$T_n-T_n^*$	$S_n-S_n^*$
0	20.000000010000000	20.000000010000000	0.000000010000000	0.000000010000000
1	-1333.333335333333334	-1313.333335323333334	-0.000002000000001	-0.000001990000001
2	26666.666733333333400	25353.333398010000066	0.000066666666733	0.000064676666732
3	-253968.254857142858476	-228614.921459132858411	-0.000888888890222	-0.000824212223490
4	1410934.750617283963316	1182319.829158151104905	0.006349206361905	0.005524994138415
5	-5130671.825557158961039	-3948351.996399007856134	-0.028218694955908	-0.022693700817493
6	13155568.796635463558664	9207216.800236455702530	0.085511196878841	0.062817496061348
7	-25058226.304363871159215	-15851009.504127415456685	-0.187936696530982	-0.125119200469634
8	36850332.837385437455652	20999323.333258021998967	0.313227827708251	0.188108627238617
9	-43099804.531269906786258	-22100481.198011884787291	-0.409448140999823	-0.221339513761207
10	41047432.927971153646002	18946951.729959268858712	0.430998043373208	0.209658529612001
11	-32448563.611872400461846	-13501611.881913131603134	-0.373158479297582	-0.163499949685581
12	21632375.762880642721220	8130763.880967511118086	0.270404695278378	0.106904745592797
13	-12326140.048155566090888	-4195376.167188054972802	-0.166402889485280	-0.059498143892483
14	6071990.177577195143904	1876614.010389140171102	0.088043856914540	0.028545713022057
15	-2611608.681139434547527	-734994.670750294376425	-0.040479934233822	-0.011934221211764
16	989245.713542061829287	254251.042791767452863	0.016322554134702	0.004388332922938
17	-332519.567909683207757	-78268.525117915754894	-0.005819092386048	-0.001430759463110
18	99855.726198859692417	21587.201080943937523	0.001847330917129	0.000416571454020
19	-26951.613036090531347	-5364.411955146593824	-0.000525556448948	-0.000108984994929
20	6573.564161717596193	1209.152206571002369	0.000134758063900	0.000025773068972
21	-1455.938907705683357	-246.786701134680988	-0.000031302686171	-0.000005529617200
22	294.129072557903488	47.342371423222500	0.000006617904056	0.000001088286857
23	-54.417959824612870	-7.075588401390370	-0.000001278822041	-0.000000190535184
24	9.254755081467828	2.179166680077458	0.000000226741497	0.000000036206313
25	-1.451726288740797	0.727440391336661	-0.000000037019020	-0.000000000812707
26	0.210700477531571	0.938140868868232	0.000000005583563	0.000000004770856
27	-0.028377168719498	0.909763700148734	-0.000000000780372	0.000000003990483
28	0.003556036183944	0.913319736332678	0.000000000101347	0.000000004091830
29	-0.000415667584746	0.912904068747932	-0.000000000012262	0.000000004079568
30	0.000045428151384	0.912949496899316	0.000000000001386	0.000000004080954
31	-0.000004652140443	0.912944844758873	-0.000000000000147	0.000000004080807
32	0.000000447321197	0.912945292080070	0.000000000000015	0.000000004080822
33	-0.000000040463247	0.912945251616822	-0.000000000000001	0.000000004080820
34	0.000000003449552	0.912945255066375	0.000000000000000	0.000000004080821
35	-0.000000000277630	0.912945254788745	-0.000000000000000	0.000000004080821
36	0.000000000021129	0.912945254809873	0.000000000000000	0.000000004080821
37	-0.000000000001523	0.912945254808351	-0.000000000000000	0.000000004080821
38	0.000000000000104	0.912945254808455	0.000000000000000	0.000000004080821
39	-0.000000000000007	0.912945254808448	-0.000000000000000	0.000000004080821
40	0.000000000000000	0.912945254808448	0.000000000000000	0.000000004080821

第Ⅲ.3表 $x=20$ に対する $\cos(x)$ の各項の値

n	$T_n^* = (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$S_n^* = \sum_{k=0}^{n} T_k^*$
0	1.000000000000000	1.000000000000000
1	-200.000000000000000	-199.000000000000000
2	6666.666666666666667	6467.666666666666667
3	-88888.888888888888889	-82421.222222222222222
4	634920.634920634920635	552499.412698412698413
5	-2821869.488536155202822	-2269370.075837742504409
6	8551119.662230773341884	6281749.586393030837475
7	-18793669.587320380971175	-12511920.000927350133699
8	31322782.645533968285291	18810862.644606618151592
9	-40944813.915730677497112	-22133951.271124059345521
10	43099804.121821765786434	20965852.850697706440913
11	-37315847.724521009338904	-16349994.873823302897991
12	27040469.365594934303554	10690474.491771631405563
13	-16640288.840366113417571	-5949814.348594482012008
14	8804385.629823340432578	2854571.281228858420569
15	-4047993.393022225486243	-1193422.111793367065673
16	1632255.400412187696066	438833.288618820630392
17	-581909.233658533937991	-143075.945039713307599
18	184733.090050328234283	41657.145010614926684
19	-52555.644395541460678	-10898.499384926533994
20	13475.806255267041199	2577.306870340507205
21	-3130.268584266443949	-552.961713925936744
22	661.790398364998721	108.828684439061977
23	-127.882202582608448	-19.053518143546471
24	22.674149394079512	3.620631250533041
25	-3.701901941890533	-0.081270691357492
26	0.558356250662222	0.477085559304730
27	-0.078037211832596	0.399048347472135
28	0.010134702835402	0.409183050307537
29	-0.001226219338827	0.407956830968710
30	0.000138555857495	0.408095386826205
31	-0.000014654241935	0.408080732584270
32	0.000001453793843	0.408082186378112
33	-0.000000135551873	0.408082050826239
34	0.000000011900955	0.408082062727194
35	-0.000000000985586	0.408082061741607
36	0.000000000077119	0.408082061818727
37	-0.000000000005710	0.408082061813016
38	0.000000000000401	0.408082061813417
39	-0.000000000000027	0.408082061813390
40	0.000000000000002	0.408082061813392

第 II.4 表　$x=20,\ \varepsilon=10^{-8}$ に対する $\cos(x+\varepsilon)$ の各項の値

n	$T_n=(-1)^n\frac{(x+\varepsilon)^{2n}}{(2n)!}$	$S_n=\sum_{k=0}^{n}T_k$	$T_n-T_n^*$	$S_n-S_n^*$
0	1.000000000000000	1.000000000000000	0.0	0.0
1	-200.000000200000000	-199.000000200000000	-0.000000200000000	-0.000000200000000
2	6666.666680000000010	6467.666679800000010	0.000013333333343	0.000013133333343
3	-88888.889155555555889	-82421.222475755555879	-0.000266666667000	-0.000253533333657
4	634920.637460317464762	552499.414984561908883	0.002539682544127	0.002286149210470
5	-2821869.502645502677249	-2269370.087660940768366	-0.014109347474427	-0.011823198263957
6	8551119.713537491456363	6281749.625876550687997	0.051306718114478	0.039483519850522
7	-18793669.718876068509973	-12511920.092999517821976	-0.131555687538799	-0.092072167688277
8	31322782.896116230389246	18810862.803116712567270	0.250582262103955	0.158510094415678
9	-40944814.284234004304828	-22133951.481117291737556	-0.368503326807715	-0.209993232392037
10	43099804.552819809051893	20965853.071702517314335	0.430998043265458	0.221004810873421
11	-37315848.134995336463625	-16349995.063292819149291	-0.410474327124721	-0.189469516251300
12	27040469.690080568556485	10690474.626787749407195	0.324485634252932	0.135016118001632
13	-16640289.056689869694354	-5949814.429902120287160	-0.216323756276783	-0.081307638275151
14	8804385.753084740082119	2854571.323182619794959	0.123261399649541	0.041953761374390
15	-4047993.453742126821795	-1193422.130559507026836	-0.060719901335553	-0.018766139961163
16	1632255.426528274305060	438833.295968767278224	0.026116086608995	0.007349946647832
17	-581909.243550990991799	-143075.947582223713575	-0.009892457053808	-0.002542510405976
18	184733.093375523884284	41657.145793300170709	0.003325195650001	0.000782685244025
19	-52555.645394098713430	-10898.499600798542721	-0.000998557252752	-0.000215872008727
20	13475.806524783168933	2577.306923984626212	0.000269516127733	0.000053644119007
21	-3130.268650002084892	-552.961726017458680	-0.000065735640943	-0.000012091521937
22	661.790412924387641	108.828686906928961	0.000014559388921	0.000002467866984
23	-127.882205523899141	-19.053518616970180	-0.000002941290692	-0.000000473423709
24	22.674149938259104	3.620631321288924	0.000000544179592	0.000000070755883
25	-3.701902034438082	-0.081270713149158	-0.000000092547550	-0.000000021791667
26	0.558356265179485	0.477085552030326	0.000000014517263	-0.000000007274404
27	-0.078037213939600	0.399048338090726	-0.000000002107005	-0.000000009381409
28	0.010134703119174	0.409183041209900	0.000000000283772	-0.000000009097637
29	-0.001226219374387	0.407956821835513	-0.000000000035560	-0.000000009133197
30	0.000138555861651	0.408095377697164	0.000000000004157	-0.000000009129041
31	-0.000014654242389	0.408080723454775	-0.000000000000454	-0.000000009129495
32	0.000001453793889	0.408082177248664	0.000000000000047	-0.000000009129448
33	-0.000000135551878	0.408082041696786	-0.000000000000004	-0.000000009129453
34	0.000000011900955	0.408082053597741	0.000000000000000	-0.000000009129452
35	-0.000000000985586	0.408082052612155	-0.000000000000000	-0.000000009129453
36	0.000000000077119	0.408082052689274	0.000000000000000	-0.000000009129453
37	-0.000000000005710	0.408082052683564	-0.000000000000000	-0.000000009129453
38	0.000000000000401	0.408082052683965	0.000000000000000	-0.000000009129453
39	-0.000000000000027	0.408082052683938	-0.000000000000000	-0.000000009129453
40	0.000000000000002	0.408082052683940	0.000000000000000	-0.000000009129453

第II.5表　$x=13\pi/2$ に対する $\sin(x)$ の各項の値

n	$T_n^* = (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$S_n^* = \sum_{k=0}^{n} T_k^*$
0	20.420352248333656	20.420352248333656
1	-1419.183122221223019	-1398.762769972889363
2	29589.314276818100684	28190.551506845211321
3	-293773.128949865000704	-265582.577443019789383
4	1701398.443480934369374	1435815.866037914579991
5	-6449704.310495082737021	-5013888.444457168157029
6	17240174.804825720512709	12226286.360368552355680
7	-34233304.960529248947446	-22007018.600160696591766
8	52481517.430224491209567	30474498.830063794617801
9	-63989208.189676438367280	-33514709.359612643749479
10	63530738.607326245974783	30016029.247713602225304
11	-52355202.813439665154102	-22339173.565726062928798
12	36386061.949232943820959	14046888.383506880892161
13	-21613465.198990618606258	-7566576.815483737714097
14	11099280.591556855118338	3532703.776073117404242
15	-4976664.233665332008101	-1443960.457592214603859
16	1965173.418736345645694	521212.961144131041835
17	-688621.183528660883692	-167408.222384529841856
18	215577.093497521399113	48168.871112991557257
19	-60656.991666323380723	-12488.120553331823467
20	15422.808919549816766	2934.688366217993299
21	-3561.001778991389226	-626.313412773395927
22	749.951985139805071	123.638572366409143
23	-144.645267208709195	-21.006694842300051
24	25.644448833644772	4.637753991344720
25	-4.193528970311438	0.444225021033282
26	0.634493084621768	1.078718105655050
27	-0.089083424253788	0.989634681401263
28	0.011637521019533	1.001272202420796
29	-0.001418100244418	0.999854102176378
30	0.000161566867615	1.000015669043993
31	-0.000017248309040	0.999998420734953
32	0.000001728938929	1.000000149673881
33	-0.000000163037450	0.999999986636432
34	0.000000014489581	1.000000001126013
35	-0.000000001215699	0.999999999910314
36	0.000000000096449	1.000000000006763
37	-0.000000000007247	0.999999999999516
38	0.000000000000516	1.000000000000033
39	-0.000000000000035	0.999999999999998
40	0.000000000000002	1.000000000000000

第II・6表　$x=13\pi/2$, $\varepsilon=10^{-5}$ に対する $\sin(x+\varepsilon)$ の各項の値

n	$T_n=(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$S_n=\sum_{k=0}^{n}T_k$	$T_n-T_n^*$	$S_n-S_n^*$
0	20.420362248333656	20.420362248333656	0.000010000000000	0.000010000000000
1	-1419.185207176173767	-1398.764844927840111	-0.002084954950748	-0.002074954950748
2	29589.386727437211493	28190.621882509371382	0.072450619110809	0.070375664160061
3	-293774.135991711666414	-265583.514109202295032	-1.007041846665711	-0.936666182505649
4	1701405.942184090856842	1435822.428074888561809	7.498703156487468	6.562036973981818
5	-6449739.053735683431454	-5013916.625660794869645	-34.743240600694433	-28.181203626712615
6	17240284.559509804561901	12226367.933849009692256	109.754684084049191	81.573480457336576
7	-34233556.425992929079895	-22007188.492143919387639	-251.465463680132449	-169.891983222795873
8	52481954.342027359795646	30474765.849883440408007	436.911802868586079	267.019819645790206
9	-63989803.576229661657667	-33515037.726346221249661	-595.386553223290387	-328.366733577500181
10	63531391.951611378882182	30016354.225265157632521	653.344285132907399	324.977551555407217
11	-52355792.507553012251836	-22339438.282287854619315	-589.694113347097735	-264.716561791690517
12	36386507.415052165201182	14047069.132764310581867	445.465819221380223	180.749257429689706
13	-21613750.976272211061450	-7566681.843507900479583	-285.777281592455192	-105.028024162765486
14	11099438.219270629744552	3532756.375762729264970	157.627713774626214	52.599689611860728
15	-4976739.784626759559511	-1443983.408864030294541	-75.550961427551410	-22.951271815690682
16	1965205.176871640469541	521221.768007610175000	31.758135294823847	8.806863479133165
17	-688632.986430872924597	-167411.218423262749597	-11.802902212040906	-2.996038732907741
18	215580.999611711910469	48169.781188449160871	3.906114190511356	0.910075457603615
19	-60658.150140309114012	-12488.368951859953141	-1.158473985733289	-0.248398528129674
20	15423.118581866723297	2934.749630006770157	0.309662316906532	0.061263788776858
21	-3561.076765284152916	-626.327135277382760	-0.074986292763690	-0.013722503986832
22	749.968511888466397	123.641376611083638	0.016526748661327	0.002804244674494
23	-144.648596438317046	-21.007219827233408	-0.003329229607851	-0.000524984933357
24	25.645064196566144	4.637844369332736	0.000615362921372	0.000090377988015
25	-4.193633705329351	0.444210664003385	-0.000104735017912	-0.000014357029897
26	0.634509552781204	1.078720216784589	0.000016468159435	0.000002111129538
27	-0.089085823650751	0.989634393133838	-0.000002399396963	-0.000000288267425
28	0.011637845865934	1.001272238999772	0.000000324846401	0.000000036578976
29	-0.001418141217807	0.999854097781966	-0.000000040973369	-0.000000004394412
30	0.000161571694037	1.000015669476002	0.000000004826422	0.000000000432010
31	-0.000017248841185	0.999998420634817	-0.000000000532146	-0.000000000100136
32	0.000001728993963	1.000000149628780	0.000000000055035	-0.000000000045101
33	-0.000000163042799	0.999999986585981	-0.000000000005349	-0.000000000050451
34	0.000000014490071	1.000000001076052	0.000000000000490	-0.000000000049961
35	-0.000000001215741	0.999999999860311	-0.000000000000042	-0.000000000050003
36	0.000000000096452	0.999999999956763	0.000000000000003	-0.000000000050000
37	-0.000000000007247	0.999999999949516	-0.000000000000000	-0.000000000050000
38	0.000000000000516	0.999999999950033	0.000000000000000	-0.000000000050000
39	-0.000000000000035	0.999999999949998	-0.000000000000000	-0.000000000050000
40	0.000000000000002	0.999999999950000	0.000000000000000	-0.000000000050000

第Ⅲ.7 表 $x = 13\pi/2$ に対する $\cos(x)$ の各項の値

n	$T_n^* = (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$S_n^* = \sum_{k=0}^{n} T_k^*$
0	1.000000000000000	1.000000000000000
1	-208.495392973012701	-207.495392973012701
2	7245.054815161832317	7037.559422188819617
3	-100704.036719878941719	-93666.477297690122102
4	749868.846781423603527	656202.369483733481425
5	-3474315.553064728097893	-2818113.183580994616468
6	10975436.159825461302152	8157322.976244466685684
7	-25146460.166956296553338	-16989137.190711829867654
8	43691009.119914696832847	26701871.929202866965192
9	-59538392.914013702667783	-32836520.984810835702590
10	65334108.566257482752679	32497587.581446647050089
11	-58969093.679927832343560	-26471506.098481185293472
12	44546320.145141134212916	18074814.046659948919444
13	-28577546.228193332151357	-10502732.181533383231912
14	15762663.309660332479017	5259931.128126949247105
15	-7555040.646089471278522	-2295109.517962522031418
16	3175788.646035298558803	880679.128072776527385
17	-1180280.395284066856642	-299601.267211290329257
18	390607.975925546485355	91006.708714256156098
19	-115846.320681351207534	-24839.611967095051436
20	30965.928403764062142	6126.316436669010706
21	-7498.552161808320606	-1372.235725139309899
22	1652.657060998794635	280.421335859484736
23	-332.919210997650154	-52.497875138165418
24	61.535568905337235	9.037693767171816
25	-10.473373567947908	-1.435679800776092
26	1.646794975718298	0.211115174942206
27	-0.239936523835339	-0.028821348893133
28	0.032484194691966	0.003662845798833
29	-0.004097280664073	-0.000434434865240
30	0.000482635108574	0.000048200243334
31	-0.000053213747554	-0.000005013504220
32	0.000005503383536	0.000000489879316
33	-0.000000534932454	-0.000000045053138
34	0.000000048960032	0.000000003906894
35	-0.000000004226891	-0.000000000319997
36	0.000000000344792	0.000000000024795
37	-0.000000000026615	-0.000000000001820
38	0.000000000001947	0.000000000000127
39	-0.000000000000135	-0.000000000000008
40	0.000000000000009	0.000000000000001

第Ⅲ.8表　$x=13\pi/2$, $\varepsilon=10^{-5}$ に対する $\cos(x+\varepsilon)$ の各項の値

n	$T_n=(-1)^n\frac{(x+\varepsilon)^{2n}}{(2n)!}$	$S_n=\sum_{k=0}^{n}T_k$	$T_n-T_n^*$	$S_n-S_n^*$
0	1.000000000000000	1.000000000000000	0.0	0.0
1	-208.495597176585184	-207.495597176585184	-0.000204203572483	-0.000204203572483
2	7245.069007003479303	7037.573409826894119	0.014191841646985	0.013987638074502
3	-100704.332613383962877	-93666.759203557068758	-0.295893505021158	-0.281905866946656
4	749871.784517748308945	656205.025314191240186	2.937736324705418	2.655830457758761
5	-3474332.567086656398538	-2818127.541772465158351	-17.014021928300645	-14.358191470541884
6	10975500.657042282314199	8157373.115269817155848	64.497216821012047	50.139025350470164
7	-25146632.569253117693487	-16989259.453983300537639	-172.402296821140149	-122.263271470669985
8	43691351.454221628007051	26702092.000238327469412	342.334306931174204	220.071035460504219
9	-59538917.731372561074252	-32836825.731134233604840	-524.817358858406469	-304.746323397902250
10	65334748.461316307909701	32497922.730182074304861	639.895058825157022	335.148735427254772
11	-58969728.990580621699226	-26471806.260398547394365	-635.310652789355665	-300.161917362100893
12	44546843.700117733882048	18075037.439719186487683	523.554976599669132	223.393059237568238
13	-28577910.091040149213944	-10502872.651320962726261	-363.862846817062587	-140.469787579494349
14	15762879.445741205760975	5260006.794420243034714	216.136080873281958	75.666293293787609
15	-7555151.639683523614813	-2295144.845263280580099	-110.993594052336290	-35.327300758548681
16	3175838.413055389094314	880693.567792108514216	49.767020090535511	14.439719331986830
17	-1180300.047177044481847	-299606.479384935967632	-19.651892977625205	-5.212173645638375
18	390614.862196396119258	91008.382811460151626	6.886270849633903	1.674097203995528
19	-115848.476471816696315	-24840.093660356544689	-2.155790465488781	-0.481693261493253
20	30966.534979473077340	6126.441319116532651	0.606575709015198	0.124882447521945
21	-7498.706391445822634	-1372.265072329289983	-0.154229637502028	-0.029347189980083
22	1652.692671391514728	280.427599062224745	0.035610392720092	0.006263202740009
23	-332.926710600134999	-52.499111537910254	-0.007499602484845	-0.001236399744835
24	61.537015374655407	9.037903836745154	0.001446469318173	0.000210069573337
25	-10.473630015513047	-1.435726178767894	-0.000256447565139	-0.000046377991802
26	1.646836911531674	0.211110732763780	0.000041935813376	-0.000004442178426
27	-0.239942868848525	-0.028832136084745	-0.000006345013187	-0.000010787191612
28	0.032485085538205	0.003652949453461	0.000000890846239	-0.000009896345373
29	-0.004097397040908	-0.000444447587447	-0.000000116376834	-0.000010012722207
30	0.000482649289782	0.000038201702334	0.000000014181207	-0.000009998541000
31	-0.000053215363247	-0.000015013660912	-0.000000001615693	-0.000010000156693
32	0.000005503556021	-0.000009510104891	0.000000000172486	-0.000009999984207
33	-0.000000534949743	-0.000010045054634	-0.000000000017290	-0.000010000001497
34	0.000000048961662	-0.000009996092972	0.000000000001630	-0.000009999999866
35	-0.000000004227036	-0.000010000320008	-0.000000000000145	-0.000010000000011
36	0.000000000344804	-0.000009999975204	0.000000000000012	-0.000009999999999
37	-0.000000000026616	-0.000010000001820	-0.000000000000001	-0.000010000000000
38	0.000000000001947	-0.000009999999873	0.000000000000000	-0.000010000000000
39	-0.000000000000135	-0.000010000000008	-0.000000000000000	-0.000010000000000
40	0.000000000000009	-0.000009999999999	0.000000000000000	-0.000010000000000

第 II-9 表

189

n	$J_n(x)$	Z_n	$E_n = J_n(x) - Z_n$	e_n	E_n/e_n	$2(n-1)e_{n-1}/x$	$-e_{n-2}$
69	-0.093693105618359	-0.093693299219012	1.936E-07				
70	-0.068326731054483	-0.068326899781823	1.687E-07				
71	-0.001964317857917	-0.001964360475540	4.262E-08	4.544E-08	9.379E-01	2.362E-07	-1.936E-07
72	0.065537399696241	0.065537508577108	-1.089E-07	-1.053E-07	1.034E 00	6.452E-08	-1.687E-07
73	0.096338173420504	0.096338372677565	-1.993E-07	-1.985E-07	1.004E 00	-1.516E-07	-4.544E-08
74	0.075116333497694	0.075116515159607	-1.817E-07	-1.876E-07	9.686E-01	-2.897E-07	1.053E-07
75	0.014834000156084	0.014834069646895	-6.949E-08	-8.222E-08	8.452E-01	-2.776E-07	1.985E-07
76	-0.052865333263568	-0.052865410223603	7.696E-08	6.568E-08	1.172E 00	-1.233E-07	1.876E-07
77	-0.095189306716708	-0.095189493149519	1.864E-07	1.835E-07	1.016E 00	9.983E-08	8.222E-08
78	-0.093726199080162	-0.093726409599185	2.105E-07	2.198E-07	9.576E-01	2.825E-07	-6.568E-08
79	-0.051023563848345	-0.051023706793785	1.429E-07	1.631E-07	8.766E-01	3.429E-07	-1.835E-07
80	0.013108968199777	0.013108951970935	1.623E-08	4.041E-08	4.016E-01	2.576E-07	-2.198E-07
81	0.071997912967988	0.071998029947281	-1.170E-07	-9.948E-08	1.176E 00	6.466E-08	-1.631E-07
82	0.103527650808364	0.103527856990695	-2.062E-07	-2.035E-07	1.013E 00	-1.612E-07	-4.041E-08
83	0.097787434357728	0.097787654027343	-2.197E-07	-2.379E-07	9.235E-01	-3.337E-07	9.948E-08
84	0.058799490225465	0.058799648657441	-1.584E-07	-1.953E-07	8.111E-01	-3.949E-07	2.035E-07
85	0.000995709221053	0.000995755195618	-4.597E-08	-9.320E-08	4.933E-01	-3.281E-07	2.379E-07
86	-0.057106784549675	-0.057106864638627	8.009E-08	3.778E-08	2.120E 00	-1.584E-07	1.953E-07
87	-0.099219378646494	-0.099219562485814	1.838E-07	1.597E-07	1.151E 00	6.499E-08	9.320E-08
88	-0.115534934295224	-0.115535173565149	2.393E-07	2.435E-07	9.828E-01	2.778E-07	-3.778E-08
89	-0.104122105713101	-0.104122344404459	2.387E-07	2.733E-07	8.733E-01	4.285E-07	-1.597E-07
90	-0.069802413874096	-0.069802600890398	1.870E-07	2.476E-07	7.555E-01	4.865E-07	-2.435E-07
91	-0.021522239260271	-0.021522337570786	9.831E-08	1.757E-07	5.596E-01	4.456E-07	-2.733E-07
92	0.030631938420402	0.030631946399808	-7.979E-09	7.382E-08	-1.081E-01	3.197E-07	-2.476E-07
93	0.077885005953811	0.077885119244456	-1.133E-07	-4.102E-08	2.762E 00	1.358E-07	-1.757E-07
94	0.114234172653687	0.114234374836087	-2.022E-07	-1.527E-07	1.324E 00	-7.629E-08	-7.382E-08
95	0.136875238635120	0.136875506490469	-2.679E-07	-2.505E-07	1.069E 00	-2.871E-07	4.102E-08
96	0.145828780753041	0.145829088985920	-3.082E-07	-3.287E-07	9.376E-01	-4.759E-07	1.527E-07
97	0.143116020410719	0.143116343766451	-3.234E-07	-3.869E-07	8.357E-01	-6.312E-07	2.505E-07
98	0.131816298843753	0.131816614419222	-3.156E-07	-4.282E-07	7.370E-01	-7.506E-07	3.287E-07
99	0.115243925323038	0.115244217216969	-2.919E-07	-4.583E-07	6.368E-01	-8.393E-07	3.869E-07
100	0.096366673295862	0.096366934478283	-2.612E-07	-4.847E-07	5.389E-01	-9.075E-07	4.282E-07
101	0.077489421268685	0.077489651739597	-2.305E-07	-5.156E-07	4.470E-01	-9.694E-07	4.583E-07
102	0.060161957666883	0.060162160545588	-2.029E-07	-5.606E-07	3.619E-01	-1.042E-06	4.847E-07
103	0.045240972371756	0.045241155661643	-1.833E-07	-6.310E-07	2.905E-01	-1.144E-06	5.156E-07
104	0.033034445418934	0.033034619875252	-1.745E-07	-7.416E-07	2.353E-01	-1.300E-06	5.606E-07
105	0.023470674099626	0.023470853455365	-1.794E-07	-9.131E-07	1.964E-01	-1.542E-06	6.310E-07
106	0.016253970190282	0.016254172194749	-2.020E-07	-1.177E-06	1.716E-01	-1.918E-06	7.416E-07
107	0.010987742703771	0.010987991467118	-2.488E-07	-1.584E-06	1.571E-01	-2.496E-06	9.131E-07
108	0.007259799195788	0.007260129321367	-3.301E-07	-2.212E-06	1.492E-01	-3.389E-06	1.177E-06
109	0.004693423559132	0.004693887662143	-4.641E-07	-3.195E-06	1.453E-01	-4.778E-06	1.584E-06
110	0.002971864163119	0.002972545684315	-6.815E-07	-4.753E-06	1.434E-01	-6.965E-06	2.212E-06
111	0.001844677599730	0.001845712831710	-1.035E-06	-7.262E-06	1.426E-01	-1.046E-05	3.195E-06
112	0.001123320108282	0.001124936796259	-1.617E-06	-1.137E-05	1.422E-01	-1.612E-05	4.753E-06
113	0.000671559442821	0.000674145587254	-2.586E-06	-1.820E-05	1.421E-01	-2.547E-05	7.262E-06
114	0.000394404232493	0.000398632226279	-4.228E-06	-2.977E-05	1.420E-01	-4.114E-05	1.137E-05
115	0.000227682207264	0.000234735882259	-7.054E-06	-4.968E-05	1.420E-01	-6.788E-05	1.820E-05
116	0.000129264844214	0.000141260301461	-1.200E-05	-8.449E-05	1.420E-01	-1.143E-04	2.977E-05
117	0.000072212231313	0.000092988015240	-2.078E-05	-1.463E-04	1.420E-01	-1.960E-04	4.968E-05
118	0.000039711777058	0.000076331652963	-3.662E-05	-2.579E-04	1.420E-01	-3.424E-04	8.449E-05
119	0.000021507562543	0.000087154685389	-6.565E-05	-4.624E-04	1.420E-01	-6.087E-04	1.463E-04
120	0.000011476221796	0.000131096498080	-1.196E-04	-8.425E-04	1.420E-01	-1.100E-03	2.579E-04