数理解析研究所講究録
216巻 1974年 110-122

Anosov diffeomorphism について、主に Manning の結果について

都立大 理 岡部 恒治

§0 はじめに.

Anosov diffeo とは Riemann 多様体 M から自分自身への微分位相同型 $f: M \longrightarrow M$ であって、次の条件を満すものである。

(i) $T(M)$ (M の tangent bundle) が 2つの $T(f)$ (f の微分) 不変な bundle の Whitney sum と表わされる。 i.e.

$$T(M) = E^u \oplus E^s, \quad T(f)(E^u) = E^u, \quad T(f)(E^s) = E^s$$

(ii) 定数 $c > 0$, $\lambda > 1$ を適当に取ることが出来、$\forall m \in \mathbb{N}$ に対して、

$$|T(f)^m(x)| \geqq c\lambda^m |x| \quad , x \in E^u$$

$$|T(f)^m(x)| \leqq c^{-1}\lambda^{-m} |x| \quad , x \in E^s \qquad \text{となる.}$$

これから、M は compact, without boundary とする.

これらの Anosov diffeo には次の topological conjugate によって同値関係を入れておくことが出来る。

$$f: M \longrightarrow M \qquad \text{と} \ g: N \longrightarrow N$$

の2つのAnosov diffeo が topological conjugate とは、$\exists h : M \longrightarrow N$ なる homeo があって、次の図式が可換な時を言う。

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & M \\ \downarrow h & & \downarrow h \\ N & \xrightarrow{g} & N \end{array}$$

この時 $f \sim g$ と書く。

次の問題は直ちに浮び上るであろう

〈問題0〉 すべてのAnosov diffeo を topological conjugacy class で分類せよ

これから派生する問題をいくつかを Smale は Bulletin [1] で列挙している。($\Omega(f)$ は f の non wondering set)

〈問題1〉 Anosov diffeo $f : M \longrightarrow M$ について常に、$\Omega(f)=M$?

〈問題2〉 $\Omega(f)=M$ なる全ての Anosov diffeo を求めよ(1が成立たねば)

〈問題3〉 f は常に fixed pt を持つか?

〈問題4〉 Anosov diffeo を持つための M の条件は?

〈問題5〉 M が Anosov diffeo を持つとき、M は Euclid sp で cover されるか?

これらの問題に対して、Smale, Franks, Newhouse, Shiraiwa, Manning, etc. が大きな成果を上げて来た。

まず Smale は〈問題0〉について次の conjecture を立てた

〈Smale Conjecture〉 compact mfd M 上の Anosov diffeo は infra-nil mfd 上の hyperbolic auto と同値である。

これに対して、Franksは[2]に於いて、codim 1のAnosov diffeo (ie $\dim E^u$ or $\dim E^s = 1$) で$\Omega(f)=M$ の場合について、Smale conjecture の成り立つことを示した。また問5についても同様の条件をつければ正しいことを示した。この中で強力な武器になっているのが、いわゆる「π_1-diffeo」なる概念である。(これは基本群の準同型で、diffeo の conjugacy class を規定しようという試みから生れた。) この「π_1-diffeo」なる概念は、次のFranksの論文[3] に於いてより一層大きな働きを示した。彼は条件づき ($\Omega(f)=T^n$, f_* がhyperbolic) でtorus上の Anosov diffeo の分類を決めた。下の定理がそうである。

0-1〈Th〉(T^n上のAnosov diffeo の決定).

$f: T^n \longrightarrow T^n$ Anosov diffeo, $\Omega(f)=T^n$,

$f_*: H_1(T^n;\mathbb{R}) \longrightarrow H_1(T^n;\mathbb{R})$ が hyperbolic

$\Rightarrow$ $f \sim$ hyperbolic toral auto

また〈問題4〉についても、次の結果が得られた。

0-2〈Th〉 $f: T^n \longrightarrow T^n$ Anosov diffeo $\Rightarrow$

$f_*: H_1(T^n;\mathbb{R}) \longrightarrow H_1(T^n;\mathbb{R})$ は root of unity の固有値を持たない。

この結果は次のShiraiwa [4]につながる。

0-3〈Th〉 M compact connected, $f: M \longrightarrow M$ Anosov diffeo

$\Rightarrow$ $f_*: H_*(M;\mathbb{Q}) \longrightarrow H_*(M;\mathbb{Q})$ は id でない

この主定理といくつかのCorollaryから、次のいくかのmfdがAnosov diffeoを持たない事が示された。

その例：rational homology sphere, lens space, projective space（$\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$, Cayley number それぞれの上の）, $S^{2n}\times S^{2n}$ $(n\geq 1)$, $Spin(n)$, $SU(n)$, $Sp(n)$, 例外Lie group, G_2, G_4, E_6, E_7, E_8 … etc.

一方Manningは、[5]において、periodic pointの個数を、Markov partitionのsubshiftのmatrixの固有値によって書き表わした。これと、nilmanifold上でLefshetz formulaが成立することを示し、この2つのperiodic pointの個数を表わす式の比較によって、次の定理を得た。以後 M は infranil manifold！

0-4° Th A（hyperbolic conditionの除去）

> $f : M \longrightarrow M$ Anosov diffeo
>
> $\Rightarrow$ $f_* : \pi_1(M) \longrightarrow \pi_1(M)$ が hyperbolic

（注）NをNilpotent Lie groupで、Mのuniversal coveringとした時、f_*は $\tilde{f}_* : N \longrightarrow N$ なるautomorphismへextentできる。$D\tilde{f}_* : T_eN \longrightarrow T_eN$（$T_eN$は単位元 $e\in N$ でのtangent space）がhyperbolicな時 f_* をhyperbolicと呼ぶ。

また、彼は π_1-diffeoを再び用いて、Lefshetz numberの比較、などから、次の定理を示した。

0-5° Th B（$\Omega(f)$ conditionの除去；問1への部分的解答）

$$f : M \longrightarrow M \quad \text{Anosov diffeo} \quad \Rightarrow \Omega(f) = M$$

この ThA, ThB は、Franks の Th（T^n 上の Anosov diffeo の決定）の条件を二つ除去する役目を果している。よって、次の定理がわかる

0-6 Th. C　（(0) の部分的解答）

$f : M \longrightarrow M$　Anosov diffeo

$\Rightarrow$　f も hyperbolic infranil manifold Automorphism

これは Smale conjecture の infranil manifold についての完全な解答になっている。この ThA と ThB は Manning [6] に示されている。この証明を中心に解説しよう。

§1 Franks の π_1-diffeo

次の Th が Manning の結果への突破口となったものである。

1-1 <Th>　$g : M \longrightarrow M$ を hyperbolic infranil manifold Auto とする時 g は次の性質を持つ。$\forall K$: CW-complex, $\forall f : K \longrightarrow K$ homeo, $\forall h : K \longrightarrow M$ conti map で f も h も base pt preserve とする。今

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(M) & \xrightarrow{g_*} & \pi_1(M) \\ \uparrow h_* & & \uparrow h_* \\ \pi_1(K) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(K) \end{array}$$

が可換 $\Rightarrow$ $\exists h' \simeq h$ s.t.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{g} & M \\ h' \uparrow & & \uparrow h' \\ K & \xrightarrow{f} & K \end{array}$$

が可換

(注) この時 g を π_1-diffeo の条件をもっているという。

上の Th を用いて 0-1〈Th〉を証明するには次のようにすれば良い。

〈証明〉 今 $\forall f: T^n \longrightarrow T^n$ Anosov diffeo を持ってくる。f が fix pt を持つ事は、単純な計算で出る。

1-1 Th により、

$$\begin{array}{ccc} f: T^n & \longrightarrow & T^n \\ h' \downarrow & & \downarrow h' \\ T^n & \xrightarrow{\ g\ } & T^n \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{s.t. } h' \simeq id \\ g \text{ は } g_* = f_* \text{ なる} \\ \text{toral auto} \end{array}$$

なる可換図式が得られる（∵ 0-7 の条件の所に $h = id$ として代入せよ！ $g_* = f_*$ としておけば明らかに可換であろう）

この h' が homeo であることを示せば良い（T^n: compact, Hausdorff より 1:1, onto 性を示せば良い）

◎ h' onto なることは、T^n が境界なしの compact mfd で、$h' \simeq id$ より容易である。

◎ h' 1:1 なること。 h' の universal covering への lift $\bar{h}'$ を考えよ、これが 1:1 であることを示す。($\bar{h}': R^n \longrightarrow R^n$)

$R^n \ni x$ に対して、$\bar{f}$ の unstable leaf $u(x) = \{y \in R^n ; \lim \bar{f}^{-n}(y) = \lim \bar{f}^{-n}(x)\}$ $\bar{f}$ の stable leaf を $S(x) = \{y \in R^n ; \lim \bar{f}^n(y) = \lim \bar{f}^n(x)\}$ として定義せよ、この leaf が、直交し、座標系の如くに取れる事は既に知られている。今、$z \neq z'$ で $\bar{h}'(z) \neq \bar{h}'(z')$ なる二点 z, z' が取れたとする。そうすると $z'' = u(z) \cap S(z')$ なる点 z'' も決まる。

この z'' は $\bar{h}'(z'') = u(\bar{h}'(z);\bar{g}) \cap S(\bar{h}'(z');\bar{g}) = \bar{h}'(z)$

(∵ $\bar{h}'(z) = \bar{h}'(z')$) 但し $S(y;\bar{g})$ は y の $\bar{g}$ に於ける stable leaf を示す。$u(y;\bar{g})$ も同様。

∴ $u(z'') = u(z)$, $\bar{h}'(z'') = \bar{h}'(z)$, $z'' \neq z$ なる z'', z が得られた。ところが $\bar{h}'$ が proper map (compact set の逆像も compact) なることが, $\bar{h}' \simeq id$ なる事より得られる。

このような z, z'' に対し、$\Omega(f) = T^n$ という事を用いると、(proper から殆んど明らかに) $d(u(z); z, z'') < \mu$ なる μ constant が求まる。但 $d(u(z); \cdot\ \cdot)$ は $u(z)$ の中での距離. 一方, $\bar{f}^n(z)$, $\bar{f}^n(z'')$ についても $u(\bar{f}^n(z)) = u(\bar{f}^n(z''))$, $\bar{h}'(\bar{f}^n(z)) = \bar{g}^n(\bar{h}'(z)) = \bar{g}^n(\bar{h}'(z'')) = \bar{h}'(\bar{f}^n(z''))$ であるから、$d(u(\bar{f}^n(z)); \bar{f}^n(z), \bar{f}^n(z'')) < \mu$ である. しかし、unstable leaf の定義から、n を十分大に取ると、

$d(u(\bar{f}^n(z)); \bar{f}^n(z), \bar{f}^n(z'')) > \mu$ となる。これは矛盾.

§2 Manning's calculation

この§ではManning [5] の結果を述べる.

$f: M \to M$ Axiom A diffeo (Anosov なら O.K.) $M \supset \Omega$ を一つの basic set とする(白岩氏の講演参照)。このとき, Markov partition $\mathcal{C}$ of Ω とは、$\mathcal{C}$ は finite cover of Ω で

(0) ${}^\forall E_j \in \mathcal{C}$ は rectangle (stable leaf と unstable leaf の直積)

で $\overline{\mathring{E}_j} = E_j$ である。

(i) $E_i \cap E_j \subset \partial E_i \cap \partial E_j$

(ii) $x, y \in E_j \Rightarrow W^s(x,\varepsilon) \cap W^u(y,\varepsilon) \in E_j$

(iii) (Markov property) $E_j, E_k \in \mathcal{E}$, $x \in \mathring{E}_j \cap f^{-1}(\mathring{E}_k)$

$$\Rightarrow \begin{cases} f\{W^s(x,\varepsilon) \cap E_j\} \subset W^s(f(x),\varepsilon) \cap E_k \\ f\{W^u(x,\varepsilon) \cap E_j\} \supset W^u(f(x),\varepsilon) \cap E_k \end{cases}$$

の4条件を満すものである。

$\mathcal{E}$ に対し、$\mathcal{E}$ の transition Matrix T とは

$T = (t(E_j, E_k))$ のことである

$$\text{但し}\ t(E_j, E_k) = \begin{cases} 1 & f(\mathring{E}_j) \cap \mathring{E}_k \neq \emptyset \\ 0 & f(\mathring{E}_j) \cap \mathring{E}_k = \emptyset \end{cases}$$

今 $\Lambda(T) = \{(E_n)_{n=-\infty}^{\infty} ; E_n \in \mathcal{E},\ t(E_n, E_{n+1}) = 1\}$ とおいて、$\tau : \Lambda(T) \longrightarrow \Lambda(T)$ なる subshift of finite type を $\tau((E_n)_{n=-\infty}^{\infty}) = (E_{n+1})_{n=-\infty}^{\infty}$ とせよ。また $\pi : \Lambda(T) \longrightarrow \Omega$ を、$\pi((E_n)) = \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} f^{-n}(E_n)$ とすれば、π は map となり、次の可換図式を満たす

$$\begin{tikzcd} \Lambda(T) \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \Lambda(T) \arrow[d, "\pi"] \\ \Omega \arrow[r, "f"] & \Omega \end{tikzcd}$$

π は、ほとんど 1:1 で $\exists n$; 高々 $n:1$ になることがわかるから、f の periodic pt は τ の periodic pt で評価できそうである。

今 $i = (i_1, \cdots, i_k)$ $i_j \in \mathbb{N}$ なる n-tuple を1つ fix

する。このとき，

$$\mathcal{A}_i = \left\{ (e_1, \cdots, e_k)\ ;\ \begin{array}{l} e_j \text{ は } i_j \text{ 個の rectangle} \in \mathcal{E} \\ \cup e_j \text{ はすべて distinct} \\ \cap \, n e_j \neq \phi \end{array} \right\}$$

とおく。$\mathcal{A}_i$ に対して，transition matrix A_i を次のように定義する。$e^m = (e_1^m, \cdots, e_k^m)$，$e^l = (e_1^l, \cdots, e_k^l) \in \mathcal{A}_i$ に対し

$$t(e^m, e^l) = \begin{cases} 1 & ;\ \begin{array}{l} e_j^m = \{E_1^m, \cdots, E_{i_j}^m\} \\ e_j^l = \{E_1^l, \cdots, E_{i_j}^l\} \text{ としたとき適当に} \\ \text{index をつけ換えて } t(E_h^m, E_h^l) = 1 \text{ の時} \end{array} \\ 0 & ;\ \text{other wise.} \end{cases}$$

とし，$A_i = (t(e^m, e^l))$ （m 行 l 列の値が $t(e^m, e^l)$ の行列）とせよ。これにより，$\alpha_i : \Lambda(A_i) \longrightarrow \Lambda(A_i)$ なる shift も定まる。特に，$A_1 = T$，$\alpha_1 = \tau$ であることに注意せよ。次に与えるのが [5] の主定理である

〈Th〉（Manning の評価式） f^m の fixed pt (ie periodic pt で period m) の個数を $N_m(f)$ とした時

$$N_m(f) = \sum_{i,j} (-1)^{k+1} \mu_{i,j}^m \quad ;\ \text{但し } \mu_{i,j} \text{ は } A_i \text{ の eigen values}$$

§3 ThA の証明

いよいよ定理を証明する。証明は背理法による。即ち、Th

の反例 $f: M \longrightarrow M$ が存在するとして、このfに対する、Manning評価式とLefshotz formula が異なることを示して矛盾を出す。0°) まず $\Omega_1(f)=M$ (i.e. 1つのbasic setだけの場合)の時

1°) $f: M \longrightarrow M$ が反例とせよ (f_* が hyperbolic ではない。)

このときMをnilmfdとしても一般性を失なわない

∵) Auslander [7] により、$f_*: \pi_1(M) \longrightarrow \pi_1(M)$ は $\pi_1(M)$ の maximal nilpotent subgroup を preserve, だから、この gr. に関する(finite) covering を考えると、それは nilmfd N となる。しかも $\bar{f}$ は Anosov で、hyperbolic でない。

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, "p"'] & N \arrow[d, "p"] \\ M \arrow[r, "f"] & M \end{tikzcd}$$

2°) M が nilmanifold ならば Lefshotz formula が成立して、

$N_m(f) = \prod(1-\lambda^m)$　　λ は f_* の eigen value をすべて動く

∵) Manning [8] を見よ.

3°) A_1 の絶対値最大の固有値 μ_1 は (イ) $\mu_1 > 0$, (ロ) $|\mu_1| > |\mu_{i,j}|$ $\forall i, \forall j$ を満たす。

∵) (イ)は $\exists m$; A_1^m のすべての entries が正であること (⇐ f の M に於ける transitiveness) より出る。(ロ)は, μ_1 が $\bigcup E_i$ の periodic pt. に対応する数であり、他の固有値が $\bigcup \partial E_i$ の periodic pt. に対応する数であることより出る。

4°) $\prod(1-\lambda^m) = N_m(f) = \sum(-1)^{k+j}\mu_{i,j}$ を解析せよ

fが必ずperiodic point を持つから、λが1の巾根である事はない。($\lambda^m=1 \Rightarrow \Pi(1-\lambda^{mq})=0 \quad \forall q\geq 1$) しかも、$f_*$がhyperbolicでないから、$\exists\lambda$; $|\lambda|=1$であって，λは1の巾根でない。

$$\prod_{|\lambda|=1}(1-\lambda^m)\prod_{|\lambda|>1}(1-\lambda^m)\prod_{|\lambda|<1}(1-\lambda^m)=\sum_{\mu_{i,j}\neq\mu_1}(-1)^{k+1}\mu_{i,j}^m+\mu_1^m$$

と書き直す。mを無限大に飛ばすと、

$$\prod_{|\lambda|>1}(1-\lambda^m)\fallingdotseq\mu_1^m \qquad (m\text{十分大})$$

となる。これで両辺を割ると，

$$\prod_{|\lambda|=1}(1-\lambda^m)\prod_{|\lambda|>1}(1-\lambda^{-m})\prod_{|\lambda|<1}(1-\lambda^m)=\sum(-1)^{k+1}\mu_{i,j}^m/\mu_1^m+1$$

となる。再び $m\to\infty$ にすると，(左辺の才2,才3項$\to 1$)

$$\lim_{m\to\infty}\prod_{|\lambda|=1}(1-\lambda^m)=1 \quad \text{となる}$$

しかし、λは，1の巾根でないから，$\{\lambda^m\}$はいくらでも，1に近い部分列を持つ．故に $\lim_{m\to\infty}\prod_{|\lambda|=1}(1-\lambda^m)=0$（もし存在すれば） これは矛盾。

5°) $\Omega(f)$が いくつかのbasic set に分かれていた時は，各basic set の中のμ_1を取り，その中の最大値を取って同様の議論

§4．Th Bの証明

1°) $f:M\longrightarrow M$をThの反例 (i.e. $\Omega(f)\neq M$)とせよ．§3の1°) と同じ理由で，Mをnilmfdとして良い。

2°) 1-1 Th より下図が可換となるような $k: M \longrightarrow M$ が存在する。しかも $k \simeq id$, k は base pt preserving

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "k"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & M \arrow[d, "k"] \\ M \arrow[r, "g"] & M \end{tikzcd}$$

但し g は $g_* = f_*$ となるような nil auto

3°) M には basic set が2つ以上必ず存在する。

∵) $\bigcup_i W^u(\Omega_i) = M$ と, f が diffeo であって, M が compact without boundary という条件による。

4°) basic set のうち適当な Ω_1 を取ると, $k(\Omega_1) = M$ とできる。

∵) まず $k(\Omega(f)) = M$ なること, if $k(\Omega(f)) \neq M$ とすると $\overline{Per(g)} = M$ であるから $\exists z \in M$; $g^q(z) = z$ で, $k(\Omega(f)) \not\ni z$
さて, $\bigcup_{i=1}^{q} k^{-1} g^i(z)$ は compact f-inv subset で $\Omega(f)$ と intersect しない。しかし、これは矛盾。

つぎに, g が nil auto より, dense orbit w をもつ ($\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} g^i(w)} = M$) $k^{-1}(w) \cap \Omega(f) \ni x$ とし, $x \in {}^{\exists}\Omega_1 \subset \Omega(f)$ を取れ。

5°) $L(f^m) = L(g^m)$ (Lefshetz number が等しい)
しかも、$k \simeq id$ より、k は periodic pt を 1:1 に写す。しかし、$k(\Omega_1) = M$ であって, 別の basic set Ω_2 にも periodic pt が存在しているのであるから矛盾である。(証終)

— REFERENCES —

[1] Smale : " Differentiable Dynamical Systems" Bulletin of A.M.S.

[2] Franks : "Anosov Diffeomorphisms" Proceedings of the Simposia in Pure Mathematics, Vol. 14 (Global Analysis)

[3] Franks : "Anosov diffeomorphisms on tori" Transactions of the A.M.S. Vol 145

[4] Shiraiwa : " Some conditions on Anosov diffeomorphisms" to appear in Proceedings of Tokyo conference

[5] Manning : "Axiom A diffeomorphisms have rational zeta functions" Bull. of the London Math.Soc. Vol 3

[6] Manning : "There are no new Anosov diffeomorphisms on tori" to appear

[7] Auslander : "Bieberbach's theorems on space groups and discrete uniform subgroups of Lie groups" Annals of Mathematics Vol 71

[8] Manning : "Anosov Diffeomorphisms on Nilmanifolds" Proceedings of A.M.S. 38(1973)