

*homographic solutions of  
the three bodies problem*

東大 理 石井 一平

§. 1.

$n$ -体問題の *homographic solution* (相似解) とは、各時刻において、 $n$ -体のなす図形が、初期値において、それらによって作られる図形と相似であるような解のことをいう。

このような解は、 $n$ -体が *central configuration* (各頂点に働く力は、系の重心に向い、大きさが重心からの距離に比例するような図形) をなすときにのみ可能であり、実際に存在する [3]。又、この解は周期解である。

ここでは、3-体問題の *homographic solution* を、方程式を変換することによって直接に求め、それらの *characteristic exponents* を考察する。

3-体問題の場合、*homographic solution* は可なりて平面問題の解である。従って我々は最初から、平面3-体問題として取り扱う。

## §.2

3-質点を  $P_1, P_2, P_3$  と名づけ、それぞれの変量を  $m_1, m_2, m_3$  とする。 $P_1, P_2, P_3$  の静止直交座標系における座標をそれぞれ  $(\xi_1, \xi_2)$ ,  $(\xi_3, \xi_4)$ ,  $(\xi_5, \xi_6)$  とし、 $\xi_k$  に共役な運動量を  $p_k$  とする。

よって 3 体の運動方程式は、

$$(1) \quad \dot{\xi}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial \xi_k} \quad (k=1, \dots, 6)$$

$$\begin{cases} H = T - U \\ T = \frac{1}{2m_1}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2m_2}(p_3^2 + p_4^2) + \frac{1}{2m_3}(p_5^2 + p_6^2) \\ U = \frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}}, \quad r_{kj}^2 = (\xi_{2k-1} - \xi_{2j-1})^2 + (\xi_{2k} - \xi_{2j})^2 \end{cases}$$

で与えられる。

以下簡単のため  $m_1 = m_2 = m_3 = 1$  とし計算する。

(1) を母関数  $W_1$  による正準変換で変換する。

$$\begin{aligned} z = z'. \quad W_1 = & (\xi_3 - \xi_1) p_1' + (\xi_4 - \xi_2) p_2' + \left(\xi_5 - \frac{\xi_1 + \xi_2}{2}\right) p_3' + \left(\xi_6 - \frac{\xi_2 + \xi_4}{2}\right) p_4' \\ & + (\xi_1 + \xi_3 + \xi_5) p_5' + (\xi_2 + \xi_4 + \xi_6) p_6' \end{aligned}$$

$$\text{i.e.} \quad q_k' = \frac{\partial W_1}{\partial p_k'}, \quad p_k = \frac{\partial W_1}{\partial \xi_k} \quad \text{よって } (\xi_k, p_k) \text{ から } (q_k', p_k')$$

へ変換する。

$q_5', q_6', p_5', p_6'$  は Hamiltonian に現われない。よってこれは constant。重心が原点に静止してゐるとすれば、これらの constant はすべて 0 になる。

次に母関数

$$W_2 = r_1 \cos \theta_2 p'_1 + r_1 \sin \theta_2 p'_2 + r_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) p'_3 + r_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) p'_4$$

よって

$$\begin{cases} q'_k = \frac{\partial W_2}{\partial p'_k} & (k=1, 2, 3, 4) \\ p_{r_k} = \frac{\partial W_2}{\partial r_k} & (k=1, 2), \quad p_{\theta_k} = \frac{\partial W_2}{\partial \theta_k} & (k=1, 2) \end{cases}$$

と  $(q'_k, p'_k)$  から  $(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2, p_{r_1}, p_{r_2}, p_{\theta_1}, p_{\theta_2})$  へ正準変換を行なうと、 $\theta_2$  が Hamiltonian から消える。従って  $p_{\theta_2} = \text{const} = \lambda$  とおくと、 $\lambda$  は実角運動量である。

最後に、母関数

$$W_3 = \left(\frac{3}{2}r_1^2 + 2r_2^2\right) p_R + \frac{\frac{r_1^2}{4} + r_1 r_2 \cos \theta + r_2^2}{\frac{3}{2}r_1^2 + 2r_2^2} p_\mu + \frac{\frac{r_1^2}{4} - r_1 r_2 \cos \theta + r_2^2}{\frac{3}{2}r_1^2 + 2r_2^2} p_\lambda$$

よって

$$\begin{cases} R = \frac{\partial W_3}{\partial p_R}, & \mu = \frac{\partial W_3}{\partial p_\mu}, & \lambda = \frac{\partial W_3}{\partial p_\lambda} \\ p_{r_1} = \frac{\partial W_3}{\partial r_1}, & p_{r_2} = \frac{\partial W_3}{\partial r_2}, & p_{\theta_1} = \frac{\partial W_3}{\partial \theta_1} \end{cases}$$

と  $(r_1, r_2, \theta_1, p_{r_1}, p_{r_2}, p_{\theta_1})$  から  $(R, \mu, \lambda, p_R, p_\mu, p_\lambda)$  へ変換すると Hamiltonian は、

$$\begin{aligned} H = & 6R p_R^2 + \frac{1}{R} \left[ \frac{F_1(\mu, \lambda)}{2} p_\mu^2 + F_2(\mu, \lambda) p_\mu p_\lambda + \frac{F_3(\mu, \lambda)}{2} p_\lambda^2 \right] \\ & + \frac{k}{R} G_1(\mu, \lambda) (p_\mu - p_\lambda) + \frac{k^2}{R} G_2(\mu, \lambda) - \frac{1}{\sqrt{R}} G_3(\mu, \lambda) \end{aligned}$$

となる。但し、

$$\begin{cases}
 F_1 = 4\mu(2-3\mu) & F_2 = 2(2(\mu+\lambda) - 6\mu\lambda - 1) & F_3 = 4\lambda(2-3\lambda) \\
 G_1 = \frac{\{(1-\mu-\lambda)(3(\mu+\lambda)-1) - (\mu-\lambda)^2\}^{\frac{1}{2}}}{1-\mu-\lambda} & G_2 = \frac{1}{1-\mu-\lambda} \\
 G_3 = \frac{1}{\sqrt{\mu}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{\sqrt{1-\mu-\lambda}}
 \end{cases}$$

3-体の運動は

$$(2) \begin{cases}
 \dot{R} = \frac{\partial H}{\partial p_R} & , \dot{\mu} = \frac{\partial H}{\partial p_\mu} & , \dot{\lambda} = \frac{\partial H}{\partial p_\lambda} \\
 \dot{p}_R = -\frac{\partial H}{\partial R} & , \dot{p}_\mu = -\frac{\partial H}{\partial \mu} & , \dot{p}_\lambda = -\frac{\partial H}{\partial \lambda} \\
 \dot{\theta}_2 = \frac{\partial H}{\partial k}
 \end{cases}$$

により決定される。

$$(3) \begin{cases}
 \mu = \frac{1}{3} \\
 \lambda = \frac{1}{3} \\
 p_\mu = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} k \\
 p_\lambda = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} k \\
 \dot{R} = \frac{\partial H_1}{\partial p_R} \\
 \dot{p}_R = -\frac{\partial H_1}{\partial R} \\
 \dot{\theta}_2 = \frac{\partial H_1}{\partial k} \\
 H_1 = 6R p_R^2 + \frac{3k^2}{2R} - \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{R}}
 \end{cases}$$

が、(2)の特解であることは容易に確かめられる。これは  
homographic solution である。

方程式 (3) により  $H_1$  は積分である。  $H_1 = h$  とおく。 ( $h$  はエネルギー)

$$(4) \quad 6R\rho^2 + \frac{3k^2}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{R}} - \frac{\sqrt{3}}{k^2} \right)^2 = h + \frac{q}{2k^2}$$

を得る。

これから再びわかる様に、homographic solution はエネルギーと角運動量の間に  $h + \frac{q}{2k^2} \geq 0$  なる関係があるときのみ可能である。特に  $h + \frac{q}{2k^2} = 0$  のとき、これは Lagrange の正三角形解である。

である。

$$(4) \quad h + \frac{q}{2k^2} \geq 0 \quad \begin{matrix} h < 0 \\ \text{と下} \end{matrix} \quad \text{として}$$

$$(4)' \quad \begin{cases} \sqrt{\frac{3k^2}{2}} \left( \frac{1}{\sqrt{R}} - \frac{\sqrt{3}}{k^2} \right) = \sqrt{h + \frac{q}{2k^2}} \cos \theta_3 \\ \sqrt{6} \sqrt{R} \rho = \sqrt{h + \frac{q}{2k^2}} \sin \theta_3 \end{cases}$$

とおくと、方程式 (4) は、

$$(5) \quad \begin{cases} \dot{\theta}_2 = \frac{3k}{R} \\ \dot{\theta}_3 = \frac{3k}{R} \end{cases}$$

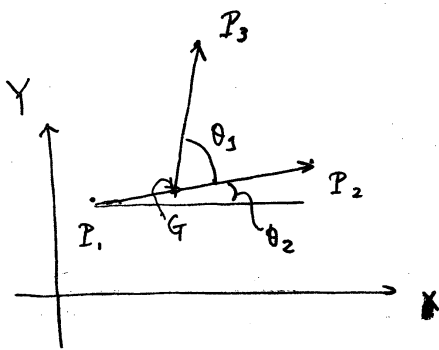
と同値。  $\theta_2$  及び  $\theta_3$  はそれぞれ  $2\pi$  を法として考えるから、

(5) は torus 上の flow を定義している。これはすべての orbit が periodic になる場合とよんでいる。これからも、homographic sol. が周期解であることがわかる。(但し、 $h < 0$  の場合)

$h \geq 0$  のときは、(4) から有効な解が得られないことがわかる。すなわち、 $h > 0$  のときの homographic sol. は、3-体が共に無限遠に去って行くような解である。

(4) より,  $h + \frac{9}{2k^2}$  が十分 0 に近くなるほど, 対応する homogeneous sol. は Lagrange-解. に十分近くなることかである。

$m_1 = m_2 = m_3 = 1$  である場合は次の様に変数をとるとよって全く同様の議論が出来る。



G は  $P_1, P_2$  の重心。

$$R = m_1 m_2 r_{12}^2 + m_2 m_3 r_{23}^2 + m_1 m_3 r_{13}^2$$

$$\mu = \frac{m_2 m_3 r_{23}^2}{R}$$

$$\lambda = \frac{m_1 m_3 r_{13}^2}{R}$$

$\theta_2$ : 固定した座標軸と  $\overrightarrow{P_1 P_2}$  のなす角度。

§. 3.

linear periodic system.

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \quad ; \quad x \in \mathbb{R}^n \quad A(t) : n \times n \text{ matrix}$$

$$A(t+\omega) = A(t) \quad \omega \geq 0$$

の解は.  $x = c \cdot P(t) \cdot e^{tR}$  ( $c$ : constant vector,  $P(t)$ :  $n \times n$  matrix,  $P(t+\omega) = P(t)$ )

$R$ : constant matrix) と表わす。  $e^R$  の特性多項式、及び特性根  $\lambda$  の system の特性多項式、特性根と呼びこくとする。

微分方程式系

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t); \quad x, t \in \mathbb{R}^n$$

のある periodic solution の特性多項式、特性根とは、その periodic solution に対する偏差方程式 (= 又は linear periodic system) の特性多項式、特性根のこととする。

ここで次の定理が知られている。

Theorem. A.

二つの linear periodic systems  $\frac{dx}{dt} = A(t)x$ ,  $\frac{dx}{dt} = B(t)x$  において、 $A(t)$  の period と  $B(t)$  の period が等しく、 $A(t)$  と  $B(t)$  とが十分近ければ、その特性根も又近い。

Theorem. B.

linear periodic system  $\frac{dx}{dt} = A(t)x$  の特性根がすべて絶対値 1 で、且、相異なり、 $\frac{dx}{dt} = B(t)x$  の特性多項式は、相反式であるとする。そのとき、 $\int_0^{\omega} |A(t) - B(t)| dt$  が十分小ならば、 $\frac{dx}{dt} = B(t)x$  の特性根も又、すべて絶対値 1 である。すなわち、 $\omega$  は  $A(t)$ ,  $B(t)$  の共通周期である。

Theorem. A, B については [1] 参照。

Theorem C. Hamiltonian system においては、任意の periodic solution の特性多項式は相反式である。[2]

そこで、系(2)の homographic solution の偏差方程式を調べる。

まず、Lagrange-solution の 偏差方程式は、

$\xi_1, \xi_2, \xi_3; \xi_4, \xi_5, \xi_6$  をそれぞれ  $R, P_R, \mu, \lambda, P_\mu, P_\lambda$  に対する variation とすると、

$$\frac{d\xi}{dt} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \xi \quad ; \quad \xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_6 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} A; \text{ } 2 \times 2 \text{ matrix} \\ B; \text{ } 4 \times 4 \text{ matrix} \\ \text{constant} \end{array}$$

となり、 $A, B$  それぞれの固有値は相異なる。

homographic solution の偏差方程式も、Lagrange-solution と同じ形をしている。但し、 $A, B$  は periodic function となる。

Lagrange-solution の特性根は計算を繰り返して、

$$27(m_1 m_2 + m_2 m_3 + m_3 m_1) < (m_1 + m_2 + m_3)^2$$

の場合、それらはすべて絶対値 1 であり、他の場合は  $\sqrt{3}$  の固有値に pure imaginary なものはなく、 $A$  の固有値は pure imaginary である。

これらの事実により、上の Theorem A, B, C を適用すれば、次の結果を得る。

Theorem. homographic solution はそれか Lagrange-solution に十分近ければ、その特性根は Lagrange-solution のそれと同じ構造をもつ。



但し、ここで特性根の構造とは、絶対値が1のもの、1より大なるもの、1より小なるものそれぞれ個数のことである。

— 参考文献 —

- [1] A. Halanay ; Differential equation  
(加藤順二訳 ; 吉岡書店)
- [2] H. Poincaré ; Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste  
vol. 1.
- [3]. A. Wintner ; The analytical foundations of celestial mechanics.