

## 一般化 Burgers 方程式と平面 Poiseuille 乱流の 数値実験

東大工 桑原真二

### § 1. 非等方、非一様な乱流の定式化

乱流現象を数学的にみて興味のあるものは、定常な境界条件、ランダムな強制力をもたない基礎方程式にも関わらず非定常運動を持続することである。カルマンの渦列もこの範疇にはいるが、乱流の前段階とみなすことができよう。こゝでは平面ポアズイユ流の一次元化モデルである一般化バーガス方程式と二次元の攪乱をともなう平面ポアズイユ乱流と非一様、非等方の乱流の例としてとりあつかう。

乱流を基本流とそれに重ね合わされた乱れとして表わすのが普通である。すなわち流速  $v$  を

$$v(x, t) = \bar{v}(x) + \tilde{v}(x, t) \quad (1.1)$$

とおき、 $\bar{v}(x)$  を層流の定常解ととる。それ故、2 のような分解では  $\tilde{v}$  の統計平均は 0 と仮定する：

$$\langle \tilde{v} \rangle = 0 \quad (1.2)$$

こゝで、 $\tilde{v}$  を

$$\tilde{u}(x, t) = \sum_{\mathcal{L}} a_{\mathcal{L}}(t) v_{\mathcal{L}}(x) \quad \mathcal{L} = (l_1, l_2, l_3) \quad (1.3)$$

と分解し,  $v_{\mathcal{L}}$  を正規直交のベクトル関数とせよ。

$$(v_{\mathcal{L}}^*, v_{\mathcal{M}}) = \delta_{l_1, m_1} \delta_{l_2, m_2} \delta_{l_3, m_3} \quad *: \text{複素共役} \quad (1.4)$$

$(, )$  はある種の内積とす。  $\mathcal{L}$  は直交関数のモードを表わすものであるが, すべてが必ずしも  $\alpha$  と  $\alpha'$  の値ではなく, その内のいくつかは連続の値をとりうる。

後に示すように一般の流体力学系は, 上の分解をもちいると  $a_{\mathcal{L}}$  に対する時間について 1 階の微分方程式となる。

$a_{\mathcal{L}}$  は各モードの振幅で, 決定論的方程式にしたがい, しかし臨界レイノルズ数を越えた状態では, 非常に複雑なふるまいをすよと考えられる。臨界レイノルズ数を越えた状態では, 初期条件として  $t=0$  の 2, 3 のモードだけに微小な振幅をあたえたとすても, 時間がたつにつれて多くのモードが励起されて, ある定常な乱流に到達するものと予想される。われわれは基本流として層流の定常流をとつたが, 定常な乱流状態では, 平均流はレイノルズ数によって変形する。それ故にこれらのモードの平均値のすべては, 必ずしも 0 にならない:

$$\langle a_{\mathcal{L}} \rangle_T \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T a_{\mathcal{L}}(t) dt = \bar{a}_{\mathcal{L}} \quad (1.5)$$

そこで平均流は

$$\bar{v} = \bar{u} + \sum_{\mathbf{k}} \bar{a}_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}(x) \quad (1.6)$$

乱れは

$$\tilde{v} = \sum_{\mathbf{k}} (a_{\mathbf{k}} - \bar{a}_{\mathbf{k}}) v_{\mathbf{k}}(x) \quad (1.7)$$

で表わされる。

後にわかるように、特殊な初期条件から始めるとすべてのモードは励起されないことがある。しかし、“ある初期条件から上述の方程式を解いて、時間を十分大きくすれば、定常乱流のほとんどすべての状態をへめまぐる”ことがほとんどすべての初期条件に対して成立つことと考えられる。(エリゴードの仮定)

## §2. 一般化バーガース方程式

Burgers は平面ポアズイユ流をモデル化して次の方程式を導いた。

$$\sigma \frac{dU}{dt} = P - \frac{\sigma U}{\sigma} - \frac{1}{\sigma} \int_0^{\sigma} v^2 dy \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{\sigma} U v + v \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - 2v \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.2)$$

ここで

$$U(t) = \int_0^{\sigma} u dy \quad (2.3)$$

$(u(y, t), v(y, t))$  は2次元の流れ、 $\sigma$  はみその中、 $P$  は圧力勾配に対応する定数である。

(2.1), (2.2) の定常解は

$$U = \frac{bP}{\nu} \equiv U_0 = \text{const.} \quad v=0 \quad (2.4)$$

となる。こゝで次のような無次元化を行なう。

$$\left. \begin{aligned} 2\nu/U_0 &\rightarrow \nu, & y/b &\rightarrow y \\ U/U_0 &\rightarrow U, & U_0 t/b &\rightarrow t \\ R &= U_0 b/\nu \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

よって (2.1), (2.2) は

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{1}{R}(1-U) = -\frac{1}{4} \int_0^1 v^2 dy \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = Uv \quad (2.7)$$

となる。

さて

$$U = 1 + \tilde{u}, \quad v = \tilde{v} \quad (2.8)$$

とおいて,  $(\tilde{u}, \tilde{v})$  を 1 次の微小量として, 線形化する。

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \frac{1}{R} \tilde{u} = 0 \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial y^2} = \tilde{v} \quad (2.10)$$

となる。 (2.10) の境界条件:

$$v(0) = v(1) = 0 \quad (2.11)$$

のものと解くと

$$\left. \begin{aligned} \tilde{v} &= V e^{ky - i\omega t} & V: \text{定数} \\ k &= \pm i \sqrt{R(1+i\omega)} \\ \omega &= i(1 - \pi^2 l^2/R) \quad l=1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

となる。よって  $\tilde{v}$  は  $e^{-i\omega t} = e^{(1 - \pi^2 l^2/R)t}$  の因子をもつ

つから  $R > \pi^2$  では不安定と存在。すなわち臨界レイノルズ数は  $R_{cr} = \pi^2$  である。(2.9) からわかるように  $\hat{u}$  は  $e^{-t/R}$  で減衰する。

$v$  は  $\tau-1$  級数:

$$\left. \begin{aligned} v(t, y) &= \sum_{l=1}^{\infty} a_l(t) \varphi_l(y) \\ \varphi_l(y) &= \sqrt{2} \sin \pi l y \end{aligned} \right\} (2.13)$$

に分解し,  $l \in L$  項までとると (2.7), (2.6) は

$$\dot{a}_1 + (\pi^2/R - \sigma) a_1 - \frac{\pi}{\sqrt{2}} \sum_{m=2}^{L-1} a_m a_{m-1} = 0 \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \dot{a}_l + (\pi^2 l^2/R - \sigma) a_l + \frac{\pi}{\sqrt{2}} \left( \sum_{m=1}^{l-1} m a_{l-m} a_m \right. \\ \left. - l \sum_{m=1}^{L-l} a_{m+l} a_m \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\dot{\sigma} - \frac{1}{R} (1 - \sigma) + \sum_{l=1}^{L-1} a_l^2 = 0 \quad (2.16)$$

と存在。

本1図は  $R = 20, > R_{cr} = \pi^2 \doteq 9.86, L = 20,$

初期条件:  $\sigma = 1, a_1 = \sqrt{2} E_0 \cos \alpha,$

$a_2 = \sqrt{2} E_0 \sin \alpha, a_3 = \dots = a_{20} = 0,$  とし、行った数値計算の結果である。

この方程式については、他にも研究があるが、次のような性質をもつといふように思われる。

有界領域での初期値問題では

1)  $t \rightarrow \infty$  で、各  $R$  に対応する定常解におちつく。

$R = 20$  では  $t \doteq 50$  では定常解となり,  $v(\infty) \doteq 0.77$

2) 定常解  $v(y)$  が存在すれば,  $-v(-y)$  も定常解であることは方程式によつて証明できるが, どちらにおよぶから初期条件による。

以上のことから一般化バーガース方程式は乱流的性格をあまりもちあわせているふうに見える。

### §3. 平面ポアズイユ乱流

平面ポアズイユ流に対して, §1でのベタ方法を適用するにあつて長さのみその中で, 速度は層流定常流の最大値  $U$  で時間  $t$  を  $a/U$ , 圧力を  $\rho U^2$  で無次元化する ( $\rho$  は密度)。そこで  $y$  の領域は  $[0, 1]$  とし

$$\bar{u} = (4y(1-y), 0) \quad (3.1)$$

となる。乱れに対する方程式は

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - \frac{2}{R} \Delta \right) \tilde{u} + \bar{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{d\bar{u}}{dy} e_1 + (\tilde{u} \cdot \text{grad}) \tilde{u} = -\text{grad } \tilde{p} \quad (3.2)$$

となる。

ここで乱れは2次元,  $x$  については周期2の周期性を仮定する。したがつて  $x$  については  $[-1, 1]$  と考えればよい。以上は乱れの数学的表現に対する単純化であり, それによつ

て、乱流の物理的特徴が失われたものではない。更に何々の速度のモードがソレノイダルであると仮定する。

以上のことを考慮して  $v_e$  に次の条件を課する。

$$1) \quad \operatorname{div} v_e = 0 \quad (3.3)$$

$$2) \quad v_e(-1, y) = v_e(1, y) \quad (3.4)$$

$$3) \quad v_e(x, 0) = v_e(x, 1) \quad (3.5)$$

$$4) \quad \int_{-1}^1 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} dx = 0 \quad y=0, 1 \quad (3.6)$$

4) の条件は  $y=0, 1$  における (3.1) の  $x$  成分:

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} = -\frac{R}{2} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} \quad (3.7)$$

と  $x$  について積分して

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} dx &= -\frac{R}{2} \int_{-1}^1 \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} dx \\ &= -\frac{R}{2} (\tilde{p}(1, y) - \tilde{p}(-1, y)) = 0 \quad (3.8) \end{aligned}$$

によりえられる。ここで  $\tilde{p}$  の周期性  $\tilde{p}(1, y) = \tilde{p}(-1, y)$  を仮定しているが、 $v_e$  の周期性から考えても当然期待されることである。

以下  $\mathbf{l} = (l_1, l_2, l_3) = (l, m, 0)$  とおく。  $v_{em}$  は次のようにしてつくることができる。まず

$$\begin{aligned} \hat{v}_{em}(x) &= \varphi_e(x) (\psi_m'(y), -\pi i l \psi_m(y)) \\ \varphi_e(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\pi l x} \end{aligned} \quad (3.9)$$

とおく。この形式によつて (3.3), (3.4) の条件は満足される。つぎに (3.5), (3.6) の条件は

$$l=0 : \psi_m = \left\{ \begin{array}{l} \sim y^2 + \alpha, \quad y \doteq 0 \\ \sim (1-y)^2 + \beta, \quad y \doteq 1 \end{array} \right\} \quad (3.10)$$

$$l \neq 0 : \psi_m \left\{ \begin{array}{l} \sim \alpha y + \beta y^3, \quad y \doteq 0 \\ \sim \alpha(1-y) + \beta(1-y)^3, \quad y \doteq 1 \end{array} \right\} \quad (3.11)$$

を要求している。そこで

$$\left. \begin{array}{l} l=0 : \hat{\psi}_m = \cos \pi m y \\ l \neq 0 : \hat{\psi}_m = \cos \pi m y - \cos \pi (m+2) y \end{array} \right\} \quad (3.12)$$

とおくことによつて (3.10), (3.12) は満足される。このよ  
うにしてつくりだした  $\hat{V}_{lm}$  は Schmidt の方法によつて直交化  
して

$$(V_{lm}^*, V_{lpq}) = \delta_{lp} \delta_{mq} \quad (3.13)$$

を満足する  $V_{lm}$  をつくり上げるこゝが出来る。そこで

$$\left. \begin{array}{l} v(x, t) = \bar{u}(y) e_t + \tilde{u}(x, t) \\ \tilde{u}(x, t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{lm}(t) V_{lm}(x) \end{array} \right\} \quad (3.14)$$

とおくことが出来る。

こゝで内積は

$$(f, g) = \int_0^1 \int_{-1}^1 f(x) g(x) dx dy \quad (3.15)$$

で定義されてゐる。(3.14) を (3.2) に代入し、更に  $V_{lm}^*$

との内積をとると  $a_{lm}$  に対する微分方程式をうる。



$$\begin{aligned} \frac{da_{lm}}{dt} + \frac{2}{R} \sum_p A_p^{lm} a_{lp} + \sum_{npr} A_{npr}^{lm} a_{np} a_{l-nr} \\ = \sum_p S_p^{lm} a_{lp} \end{aligned} \quad (3.16)$$

→ て

$$\left. \begin{aligned} A_p^{lm} &= -(W_{lm}^*, \Delta W_{lp}) \\ A_{npr}^{lm} &= (W_{lm}^*, (u_{l-nr} \frac{\partial}{\partial x} + v_{l-nr} \frac{\partial}{\partial y}) W_{np}) \\ S_p^{lm} &= -(W_{lm}^*, \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} W_{lp}) - (u_{lm}^*, v_{lp} \frac{d\bar{u}}{dy}) \end{aligned} \right\} (3.17)$$

である。→ て (3.16) の左辺第2項は粘性項、第3項は2次の慣性項 (非線形相互作用)、右辺は慣性項から出て基本流と乱れの相互作用と考へようものである。この右辺は等方性乱流では存在しない、いわば基本流から乱れをつくり出すソースの役割をはたす。  $A_{npr}^{lm}$  と  $S_p^{lm}$  は純虚数である。

この論文では、物理的現実そのままを表わすことに主眼があるのではなく、物理的乱流の機構に興味をもつ。そこでこれらの機構をそのうち最も簡単なモデルを考へる。それは  $W_{lm}$  において  $l = 0, \pm 1, \pm 2, m = 0, 1$  のことをいふので  $W_{00} \equiv 0$  であるから5つのモードのことになる。

第2回は  $R = 20,000$ , 初期条件  $a_{10} = a_{11} = 2^{-1/2}$   $10^{-2}$  (第2回上より1, 3番目のモード) について行った

数値実験の結果で、 $a_{lm}$  (モードの振幅) の時間的发展を示したものである。平面ポアズイユ法の線形安定理論による臨界レイノルズ数は約 10,000 である。図の左側に示した流れの図は各モードのスケッチであるが、基本ベクトル関数  $W_{01}$  ( $= W_{lm}$ ) が一般の旋巻数 ( $l=0$  の場合) であるので、その実数部に対する流れを示したもので、虚数部は渦の模様を半周期おらせたものに相当する。それ故、 $a_{lm}$  も、一般の旋巻数 ( $a_{-lm} = a_{lm}^*$ ) で、図の実線が実数部を、破線が虚数部をあらわしている。このほか、上に述べたように 9 位のモードをとったものであるが、 $W_{01}$  の基本流は励起されていない。時間のステップは  $\Delta t = 0.001$ 、直線でも挿入する方法で計算した。これは  $t=100$  までの計算結果であるが、十分に定常乱流に達しているかどうか、よくわからない。

#### §4. むすび

非一様、非等方の乱流を理論的に研究する方法として、乱流場を基本流と乱れに分け、更に乱れを適当な正理直交関数 (モード) で表わして、一般化バーガース方程式および  $\Omega$  ナウ、エ・ストークス方程式に適して、モードの振幅に対する方程式をえら。

一般化バーガース方程式では、層流解が、臨界レイノルズ

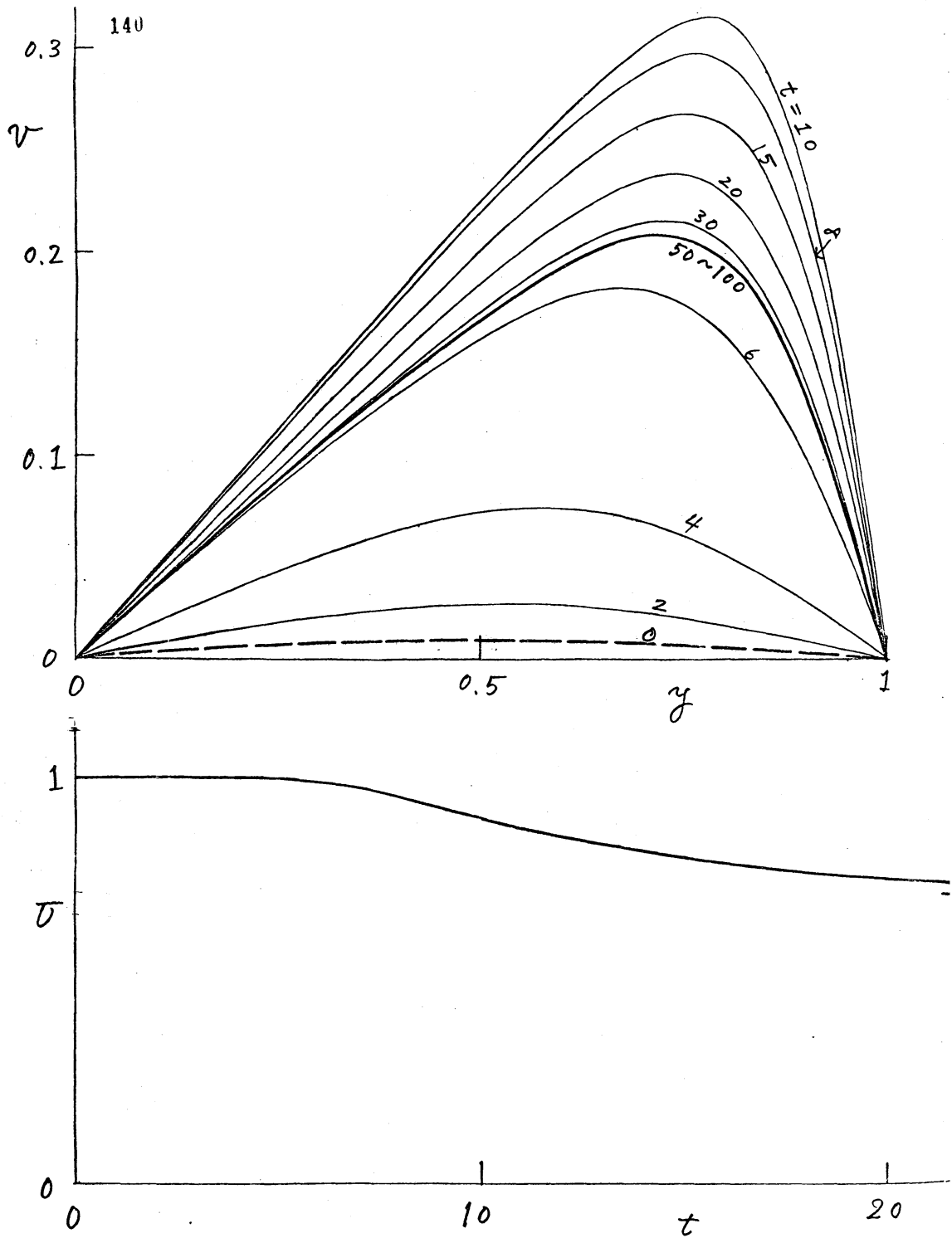
$R_{cr} = \pi^2$ 以上で不安定となり、乱流の特徴はえられず、他の層流解に移りることが示された。

平面ポアズイユ流について、乱流の特徴である非線形相互作用、すなわち基本流から乱れのモードへのエネルギーの変換、モード間の相互作用、乱れによる基本流の変形を上の方程式によってしらべた。9個のモードをとり計算を実行したのであるが、基本流から乱れのモードへ移り、モード間の相互作用によって各モードへエネルギーが更に分配する機構はわかったが、基本流の変形はみられなかった。

モードの数をふやすことによって基本流の変形、乱流の特徴である偶然性の様相がましく行くことが想像される。

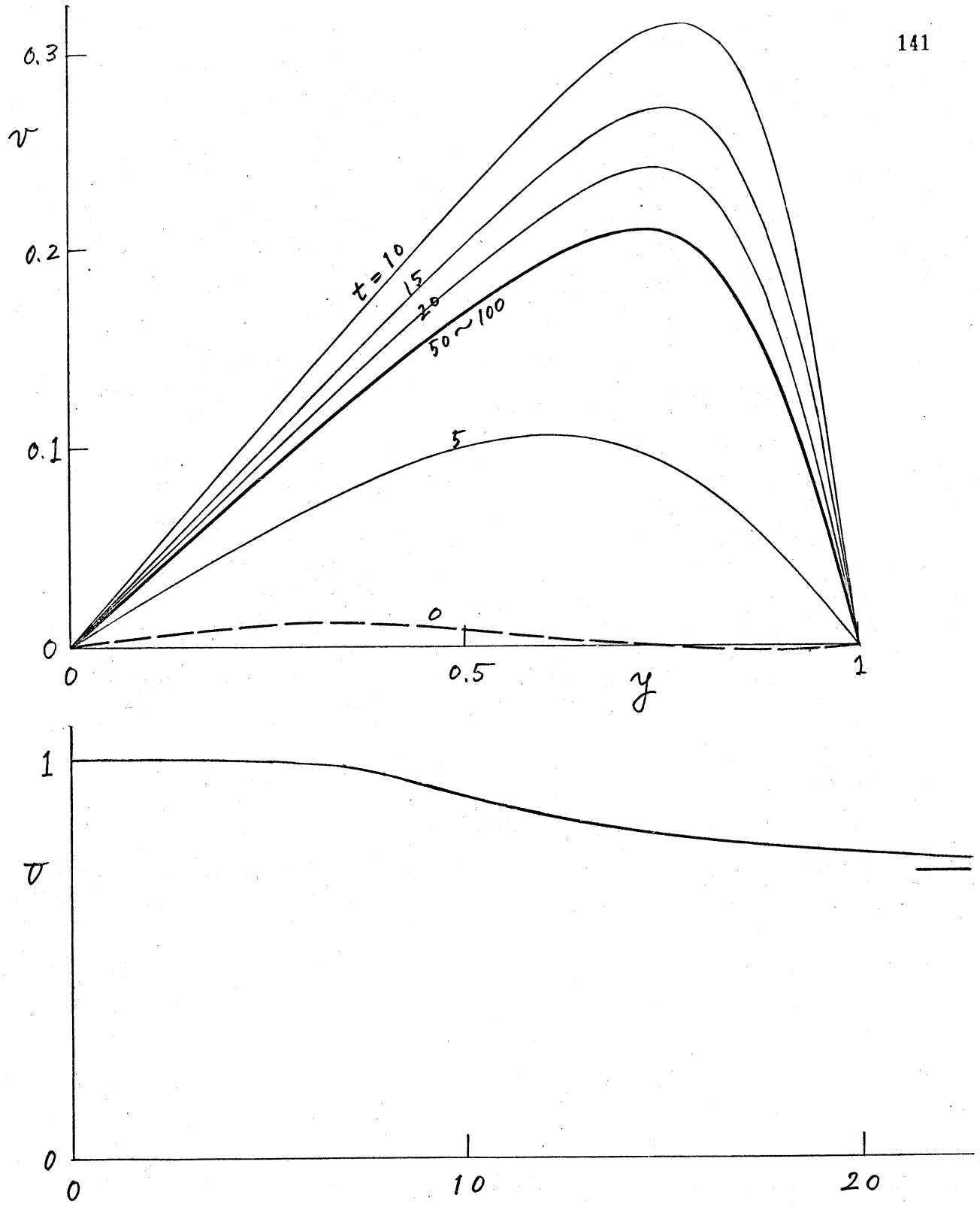
### 参考文献:

- 1) Burgers, M. J.: *Advances in Appl. Mech.*  
(Acad. Press Inc., 1948) vol. 1, p 171
- 2) Case, K. M. & S. C. Chiu: *Phys. Fl.* 12 (1969)  
1799.
- 3) Lee, J.: ~~IFT~~ *Phys. Fl.* 15 (1972) 540.



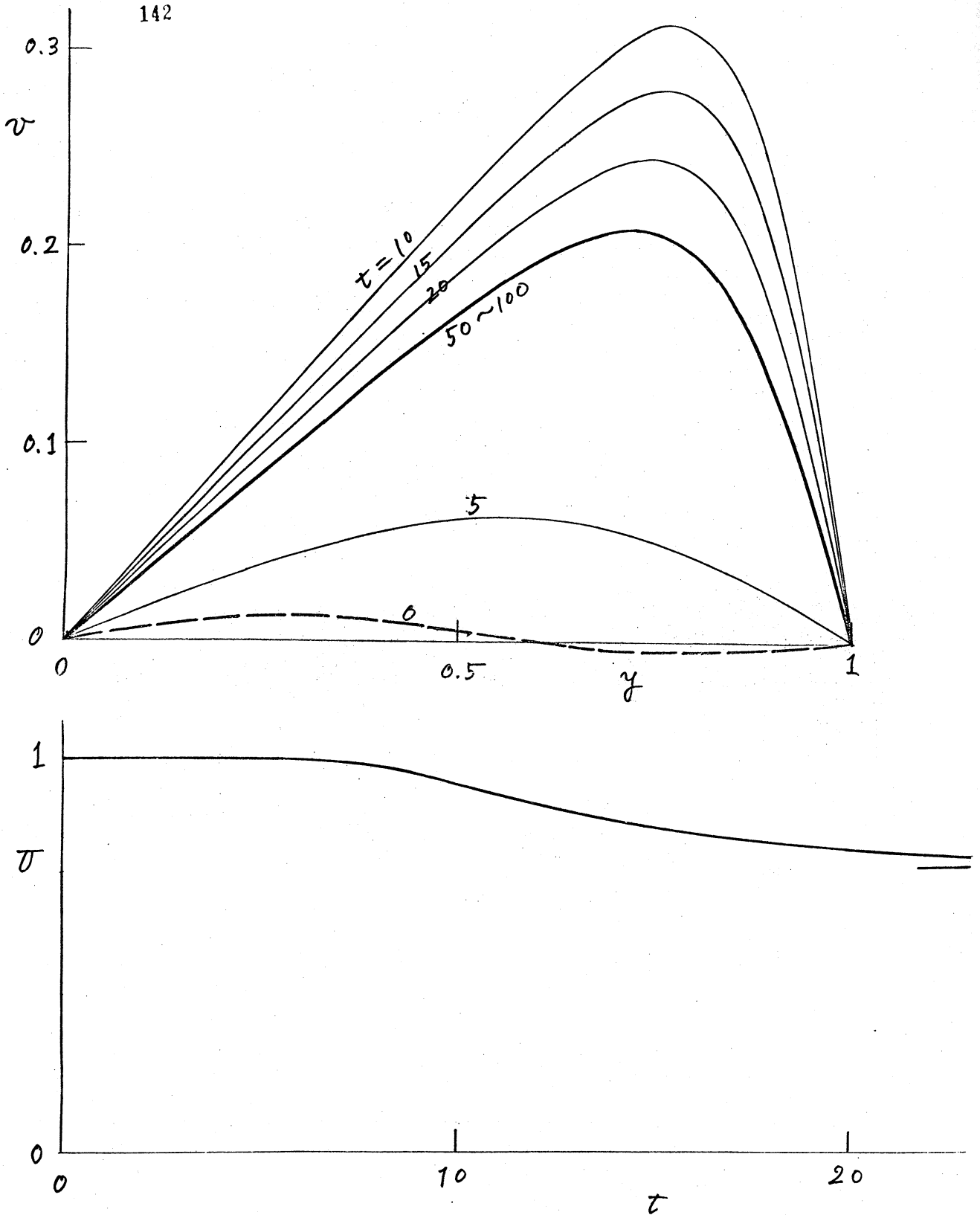
(a)  $R = 20, \nu = 1, E_{ini} = 10^{-4}, \alpha = 0$

图 1 图



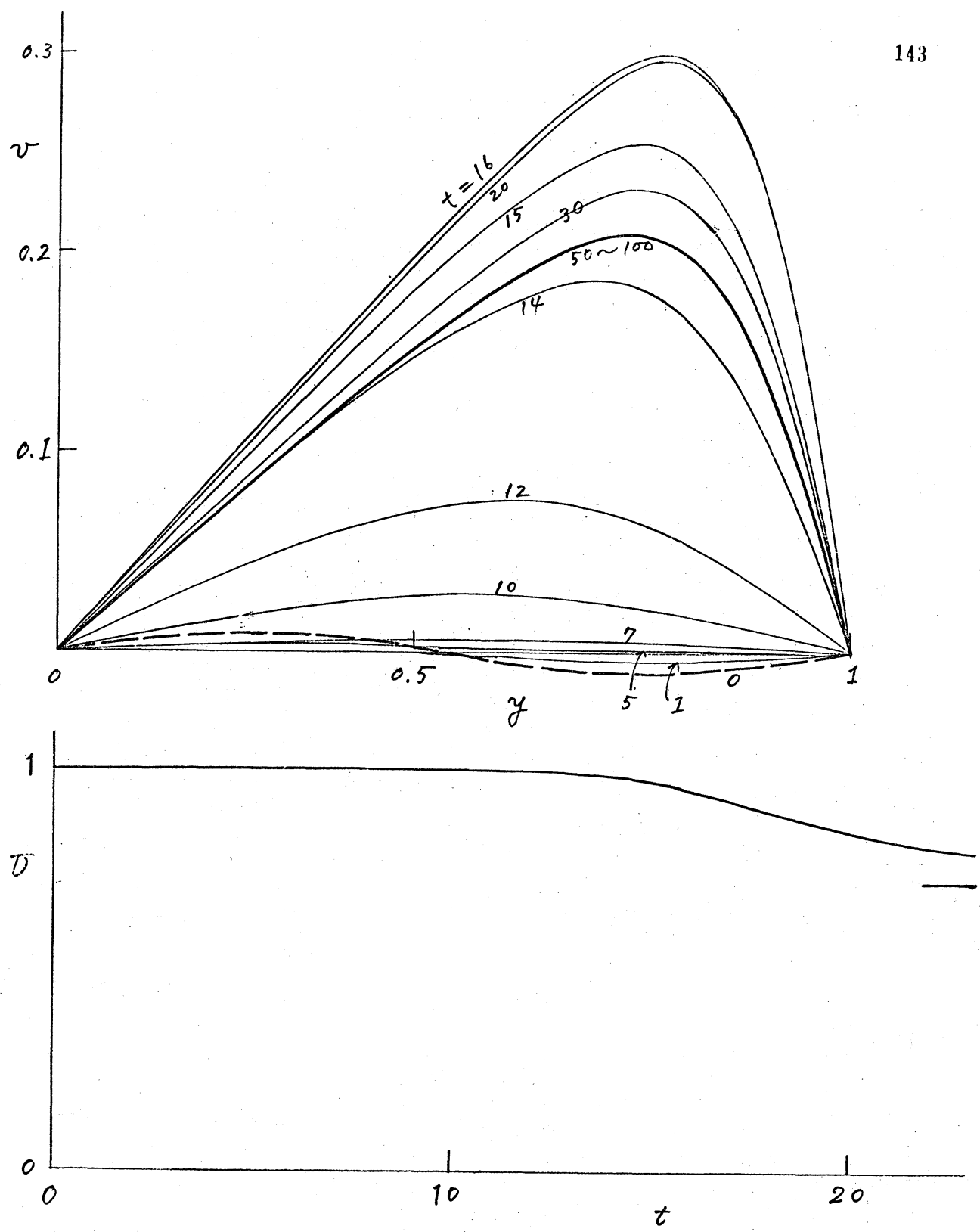
(b)  $R = 20, \nu = 1, E_{ini} = 10^{-4}, \alpha = 30$

图 1 附



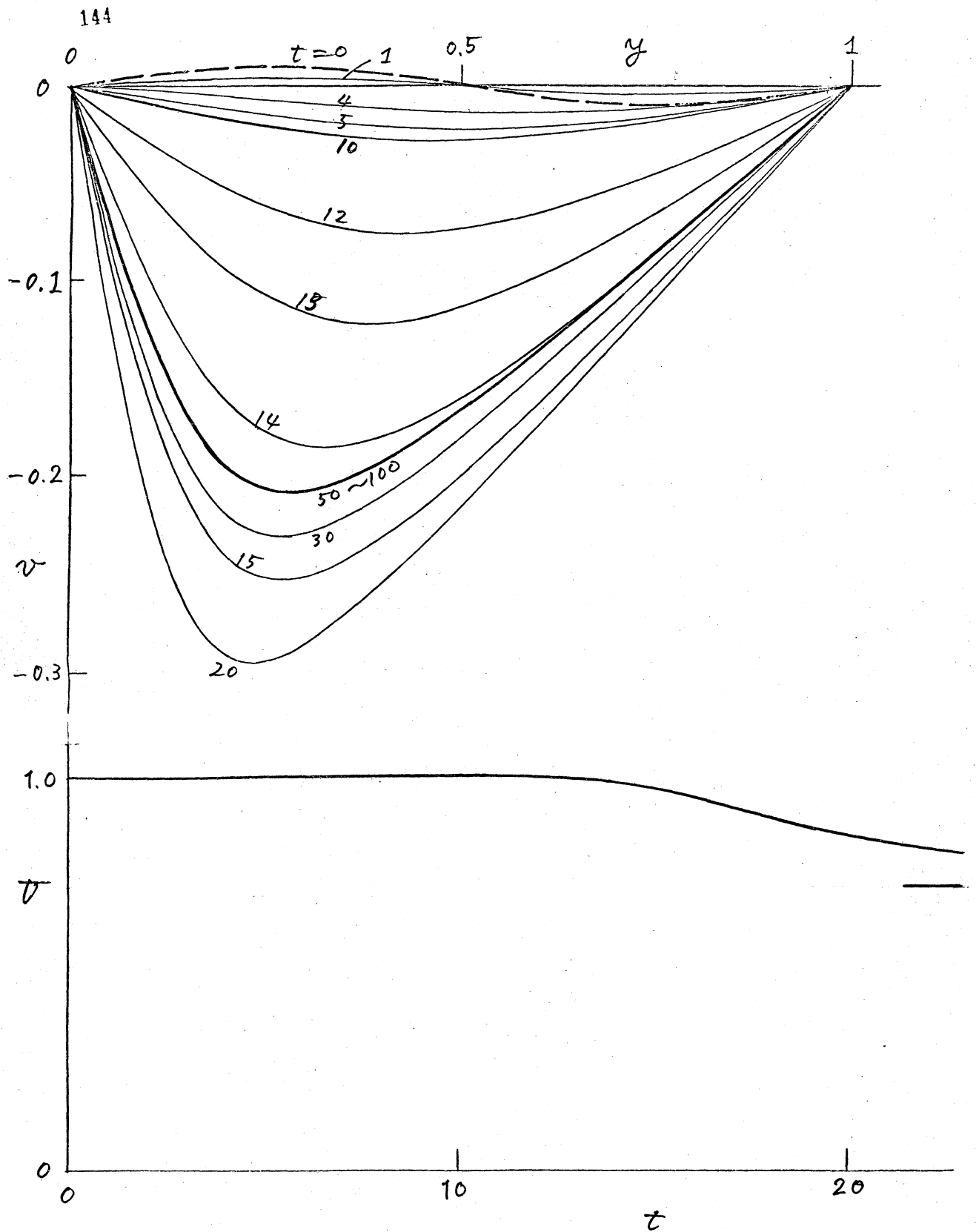
(c)  $R = 20$ ,  $U = 1$ ,  $E_{ini} = 10^{-4}$ ,  $\alpha = 60$

图 1 (c)



(d)  $R = 20, U = 1, E_{ini} = 10^{-4}, \alpha = 89$

※ 1 図

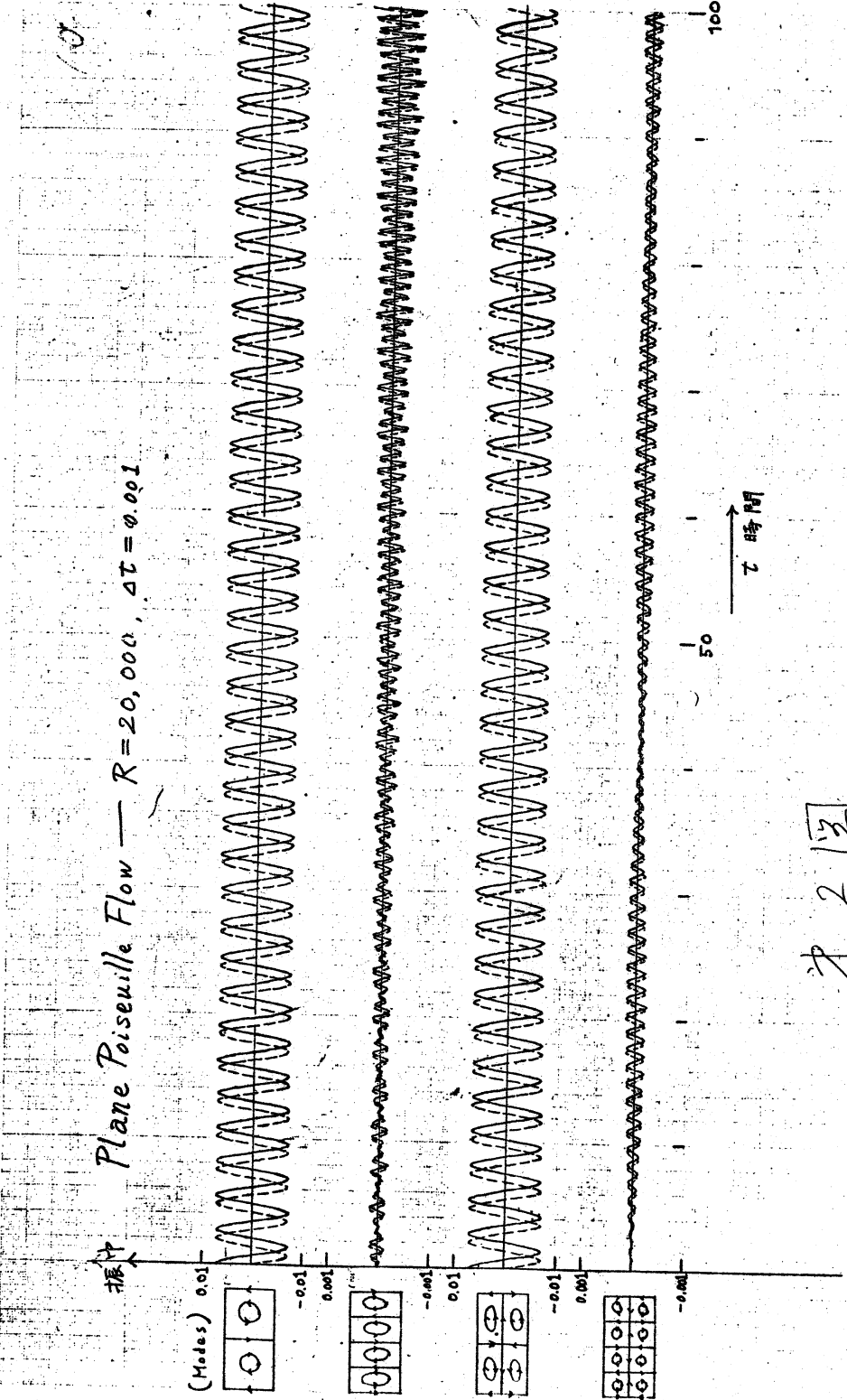


(e)  $R = 20$ ,  $\nu = 1$ ,  $E_{ini} = 10^{-4}$ ,  $\alpha = 9/$

图 1



振子  
Plane Poiseuille Flow —  $R = 20,000$ ,  $\Delta t = 0.001$



212