数理解析研究所講究録
219巻 1974年 109-126

Knot のある不変性

日大 農獣医　徳田広太郎

knot の結び量の定理は与えられた tame knot $K=(R^3, S^1)$ に対して結び量という実数 $Q(K)$ を定義し、$Q(K)$ は K の同位変形によって不変であることを示す[2)]。この定理の逆は成立たない。適当な條件を与えて、この定理の逆から knot の不変性が見つからないであろうか。この論文はこの問題に対する1つの解答を与えるものである。

§1. 結び量の定理

1.1 knot の graph[1)]

1つの tame knot $K=(R^3, S^1)$ と R^3 の中の1つの平面 π が与えられると、π の上の regular diagram (R.D. と略して書く) が定まる。この R.D. は knot と見なすことができ

る。n個の交点をもつR.D.はΠを$n+2$個の領域に分ける。これらの領域の中で弧を境界の一部として共有する2つの領域は異なるものとすれば、すべての領域は2種類に分けることができる。この中で無限遠点P_∞の属する方をWとし、他をBとする。BとWの何れの場合にも次のgraphを定義する。Wの場合も同様であるからBの場合だけについて説明する。

Bの領域R_iの内部に頂点という1点A_iを定め、$A_i \in R_i$, $A_j \in R_j$なる$\overline{R_i}$, $\overline{R_j}$が交点C_kを共有し、R_iから見てC_kの下の辺が右にあれば弧$A_iC_kA_j$に+，左にあれば−の符号をつける。そうするとR_jから見ても同じ符号がつく。こうしてできたすべての頂点と弧からなる図形をKのgraphといい，$g(K)$と表わす。同様にWにおけるKのgraphを$g'(K)$と表わす。$g(K)$と$g'(K)$をKのdual graphという.

KとΠが与えられると、$g(K)$と$g'(K)$はそれぞれ一意に定まり、$g(K)$または$g'(K)$が与えられるとKは一意に復元できる。

1.2 knot の結び量 [2)]

n個の頂点をもつgraph $g(K)$が与えられると、次のよ

うにして行列 $A(K)=(a_{ij})$, $i,j=1,2,\cdots,n$, を作る。
A_i を $g(K)$ の1つの頂点とする。$i\neq j$ ならば A_i と A_j を結ぶすべての弧に対して

$$a_{ij}=(+の弧の数)-(-の弧の数),$$

A_i を端点にもつすべての弧に対して

$$a_{ii}=-\{(+の弧の数)-(-の弧の数)\}$$

とする。そうすれば $A(K)$ は n 次の対称行列になる。
$A(K)$ から任意の1行1列を除いた行列式の絶対値を $Q(K)$ と表わす。Alexander Briggs[3] の表の 4_1 knot では

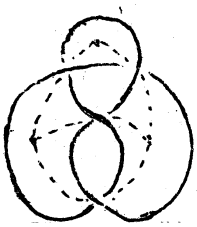
$g(K)=$  $A(K)=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 1\\ 2 & -3 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}$ $Q(K)=5$.

図1. Knot の結び量

$Q(K)$ は次の性質をもつ.

(1.1). (結び量の定理). K_1 と K_2 が同型であることを $K_1\cong K_2$ と表わせば

$$K_1\cong K_2 \text{ ならば } Q(K_1)=Q(K_2).$$

(1.2). (1.1) の系 $g(K)$ と $g'(K)$ を K の dual graph とすれば

$$Q(g(K)) = Q(g'(K))$$

(1.3) K_0 を trivial knot とすれば

$$Q(K_0) = 1 .$$

$Q(K)$ を K の結び量(knotting quantity)と定義する。$Q(K)$ は $g(K)$ の交点数の概念によって定義されている。

§2. Knot の基本変形

knot の同位変形を R.D. で見れば、交点以外の所では同位変形であるが、交点では singularity が起る。これらの singularity は図2で示す3種類の変形によって表わされる。この変形を初等基本変形(elementary fundamental operation)といい、簡単に E.F.O. と表わす。従って knot の同位変形は R.D. では同位変形と E.F.O. の有限回の組合せによって表わすことができる。この変形を基本変形(fundamental operation)といい、F.O. と表わす。

knot Kの E.F.O. を Kのgraph とそれの dual graph で表わすと図2になる。図中 O_1, O_1' 等はそれぞれ図に示した E.F.O. を表わし、•———•, •—(−)—• は辺の符号がそれぞれ +, − であることを示す。

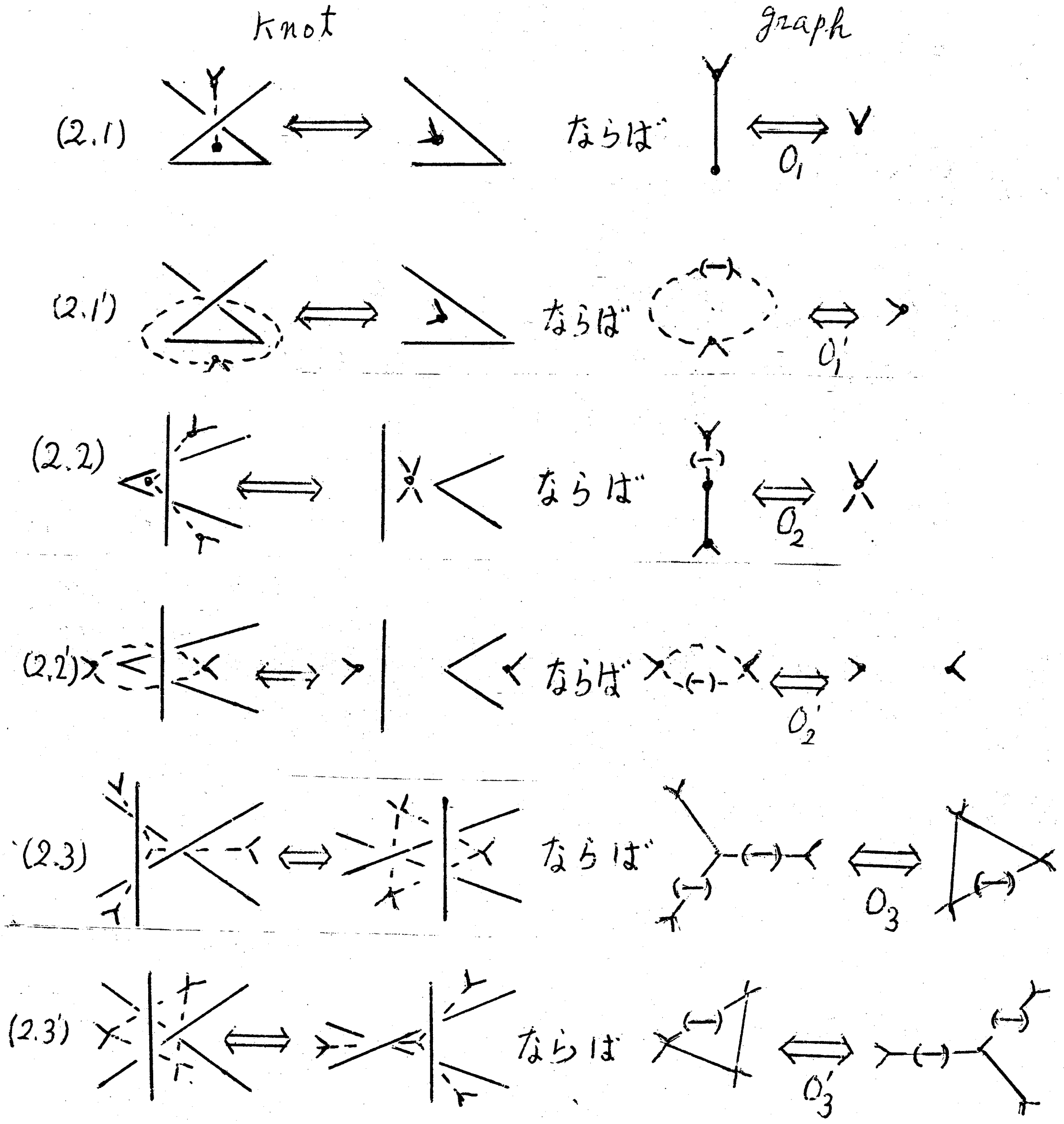


図2. knot と graph の基本変形

図3はこの論文でよく使う図2のE.F.O.から誘導される変形を示す(次の図の記号はP.11参照)。

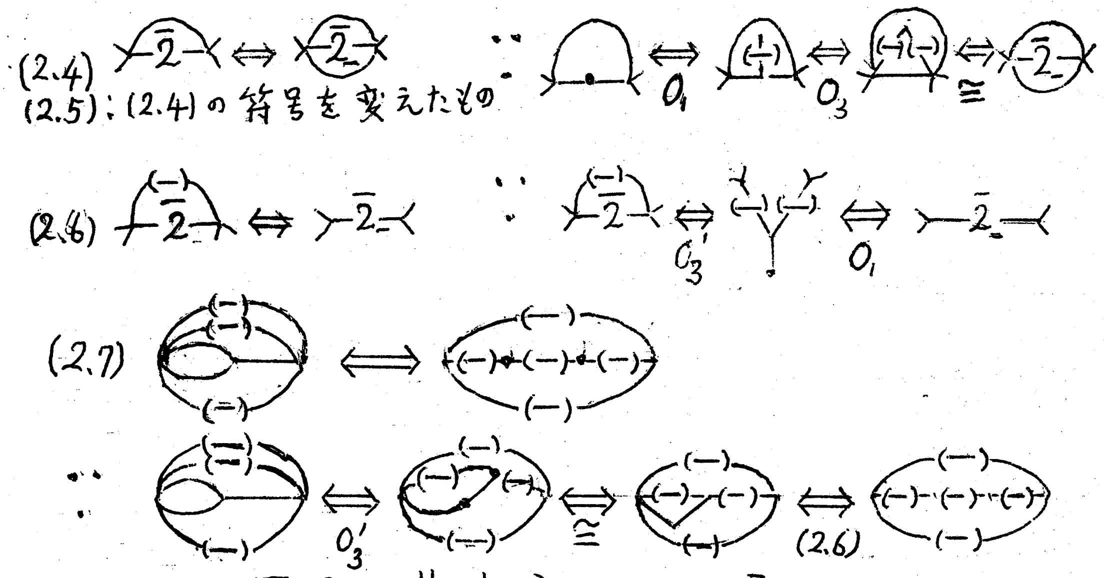


図3. 基本変形の応用

§3 Knotの結び量の定理の逆に関する問題

問題 1. (結び量の定理の逆). $Q(K_1)=Q(K_2)$ ならば $K_1 \cong K_2$ か.

この問題は成立たない。何故ならば $Q(4_1)=Q(5_1)$ であるが $4_1 \neq 5_1$ である。

問題 2. $K_1 \cong K_2$ ならば $A(K_1)=A(K_2)$ か。

この問題も成立たない。何故ならば $g(3_1)\cong g'(3_1)$ であるが $A(g(3_1)) \neq A(g'(3_1))$ である。

定義. knot K の graph $g(K)$ において、2つの頂点 A_i と A_j を結ぶ弧を l, l に隣合う graph の一部からなる Block を B とする。A_i と A_j を固定して l の内部を B だけを越すことを $C(l\#B)$ と表わし、$l\#B = g(K)$ のときは $C(l, g(K))$ と表わす。

定理 1. $A(K)$ に次の変形を行つても、$A(K)$ は変らない。

(a) $C(l\#B)$

(b) $g(K)$ の2つの頂点 A_i と A_j を結ぶ異符号の2辺の組を加えたり、または除く。

証明. (a) a_{ij}, $i\neq j$, は定義によつて A_i と A_j を結ぶ向きをもつ辺の数によつて定まり、辺の位置には関係しないから $C(l\#B)$ によつて a_{ij} は変らない。a_{ii} は a_{ij}, $i\neq j$, によつて一意に定まる。故に (a) は成立つ。

(b) A_i と A_j を結ぶ隣合う異符号の2辺は消える。従ってこのような辺の組を加えたり，除いたりしても a_{ij} に変化は起らない。また (a) によって両端を固定して辺の内部を任意の位置に移しても $A(K)$ に変りはない。故に(b)も成立つ。

問題 3. $A(K_1) = A(K_2)$ ならば $K_1 \cong K_2$ か。

$A(K)$ は K の R.D. によって π を分割してできたある領域を1点につぶしてできた graph によって定義されているから homotopic な概念であり，K の knot type は K の ambient isotopic (同型) な概念である。従って一般にはこの2つの概念の同値は一致しない。併し Alexander — Briggs の表[3]に表わされたすべての knot については問3は成立つ。それではどんな knot ならば問題 3 は成立つか.

この問題に対する1つの解答が次の主定理である。

§4 主定理

定理 2. graph $g(K)$ において，l を $g(K)$ の2つの

頂点 A_i, A_j を結ぶ弧, B を l に隣合う graph の一部から構成された Block とし、m を A_i と A_j を通る直線とする。

1. B は m に関して対称に同位変形ができる,
2. $g(K)$ に対して、次の A.O. が存在する;
   a) $f|g(K)-B$ は恒等変形、
   b) $f(l\#B)$ は m に関して対称になる同位変形,

とすれば

$$g(K)\cong C(l, g(K)).$$

証明. f_i は $g(K)$ の E.A.O. であって、$f=f_m f_{m-1}\cdots f_2 f_1$

$B_i=f_i(B_{i-1})$, $i=1,2,\cdots,m$, $B_0=B$.

S_i は B_i の m に関する対称変形で、$B_i'=S_i(B_i)$.

$f_i'=S_{i-1}f_i^{-1}S_i^{-1}$ であって $f'=f_1'f_2'\cdots f_{m-1}'f_m'$

とすれば次の diagram ができる。

$$\begin{tikzcd}
l\#B_0 \arrow[r, "f_1"'] \arrow[d, "S_0"] & l\#B_1 \arrow[d, "S_1"] \arrow[r, dashed, no head] & l\#B_{i-1} \arrow[r, "f_i"'] \arrow[d, "S_{i-1}"] & l\#B_i \arrow[d, "S_i"] \arrow[r, dashed, no head] & l\#B_{m-1} \arrow[r, "f_m"'] \arrow[d, "S_{m-1}"] & l\#B_m \arrow[d, "S_m"] \\
l'\#B_0' & l'\#B_1' \arrow[l, "f_1'"'] \arrow[r, dashed, no head] & l'\#B_{i-1}' & l'\#B_i' \arrow[l, "f_i'"'] \arrow[r, dashed, no head] & l'\#B_{m-1}' & l'\#B_m' \arrow[l, "f_m'"']
\end{tikzcd}$$

図 4. $C(l\#B)$ の diagram

$$f' = \prod_{i=m}^{1} f_i' = \prod_{i=m}^{1} (S_{i-1} f_i^{-1} S_i^{-1}) = S_0 f^{-1} S_m^{-1}$$

であつて、S_0 と S_m は graph の恒等変形であつて、f は同位変形であるから、f' もまた同位変形になる。一方

$$C(l, g(K)) = f' S_m f$$

であるから $C(l, g(K))$ は同位変形である。

系．定理２は A_i, A_j を結ぶ弧 l を A_i, A_j を両端点とする m に平行な直線に対称な Block としても成立つ。

§5. 主定理の応用

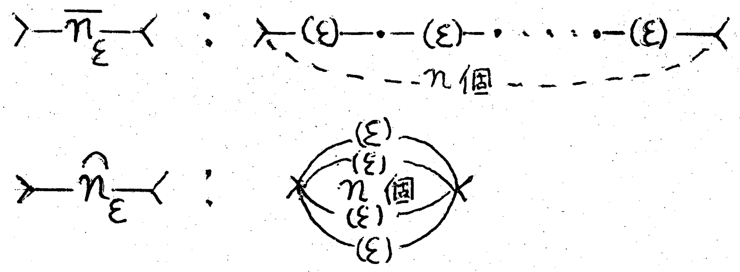
$g(K)$ において無限遠点 P_∞ は任意の領域の内部にあるようにできるから $C(l \# B)$ を行うとき、l は P_∞ を含む領域 $\overline{R}_\infty$ の境界の上にあるとしても一般性を失わない。

また l が $\overline{R}_\infty$ の境界上にあるとき、P_∞ を他の領域に移せば、$C(l \# B)$ の $B = \phi$ のときと考えられるから次の 5.1 が成立つ。

5.1　$g(K)$ の R_∞ の境界上の弧 l に対しては恒に

$$g(K) \cong C(l, g(K)).$$

今後よく使う記号を説明する。



$\varepsilon=\pm$ であって
$+$は省く。

図5 記号の説明

次に定理2の仮定を満足する幾つかの B を示す。

定理 3.

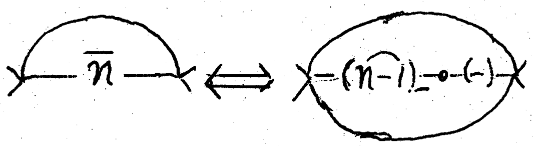


図6 定理 3

定理 4.

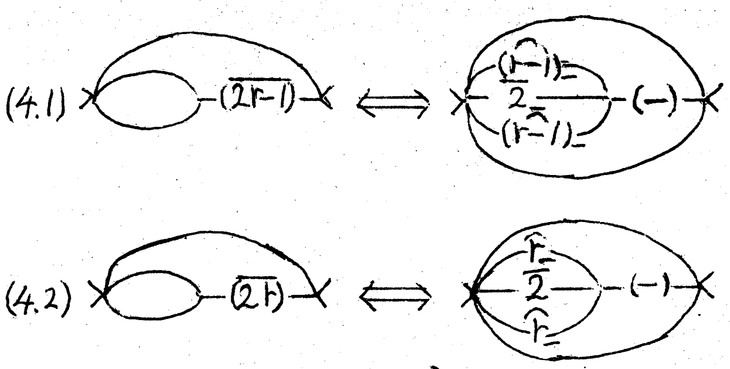
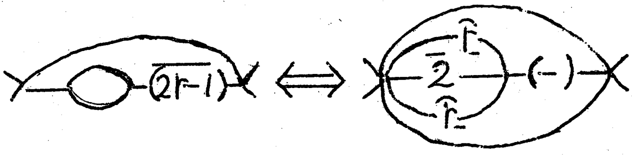
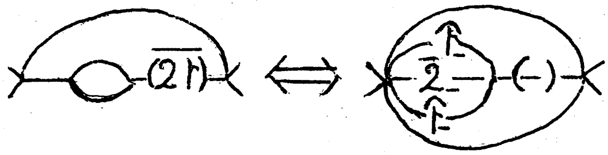


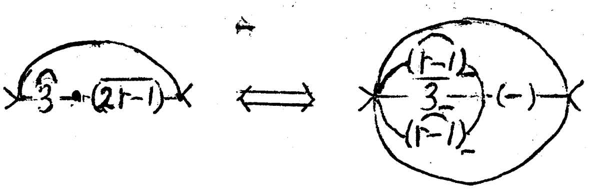
図7 定理 4

定理　5.

(5.1) 

(5.2) 

定理　6.

(6.1) 

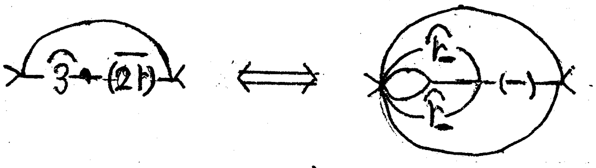
(6.2) 

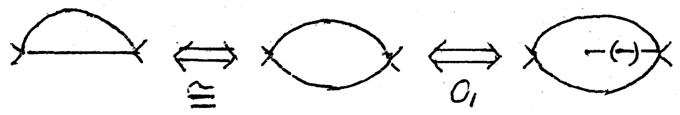
図9.　定理　6

定理の証明.

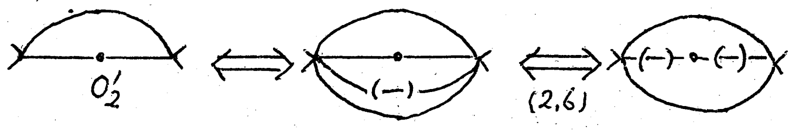
上にならべた定理3, 4, 5, 6の証明をする。

定理3の証明。

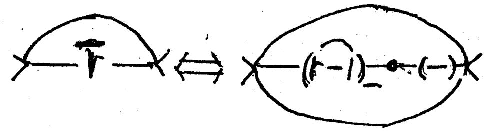
$n=1$ のとき



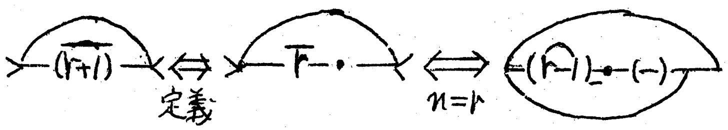
$n=2$ のとき



$n=r$ のとき



を仮定すれば $n=r+1$ のとき



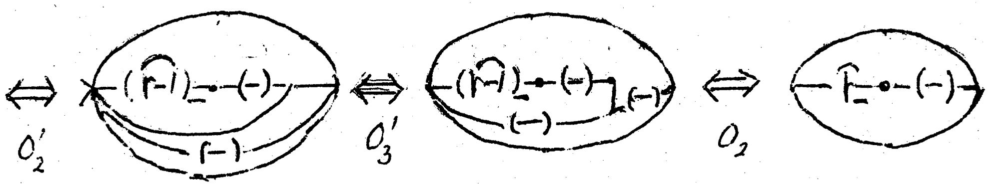
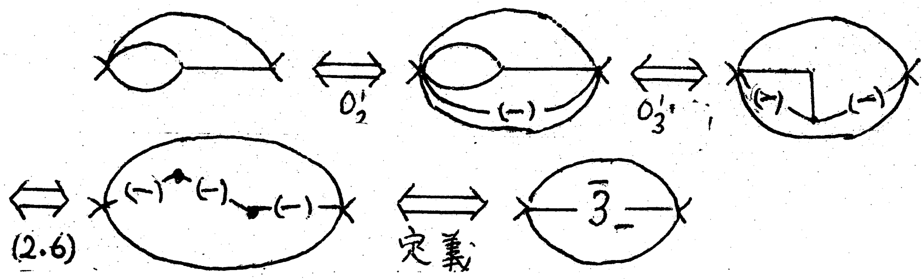


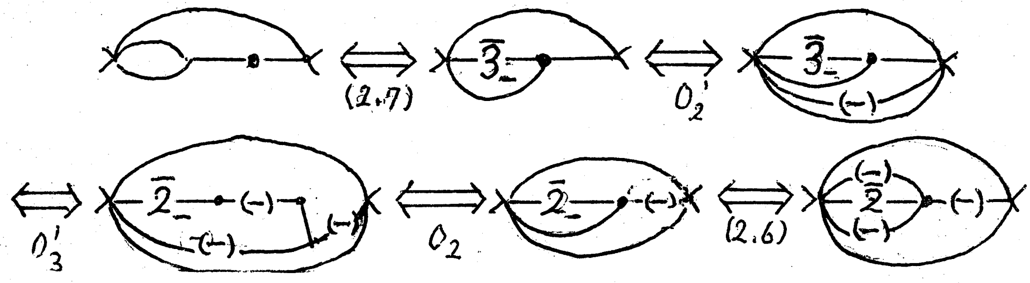
図10 定理3の証明

定理４の証明.

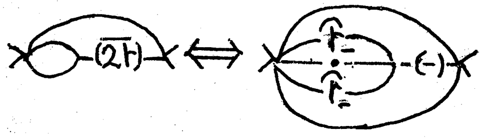
$n=1$ のとき



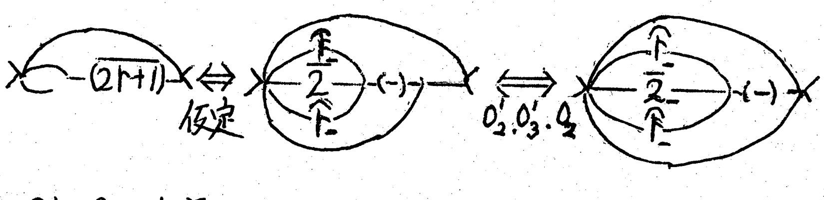
$n=2$ のとき



$n=2r$ のとき



を仮定すれば $n=2r+1$ のとき



$n=2r+2$ のとき

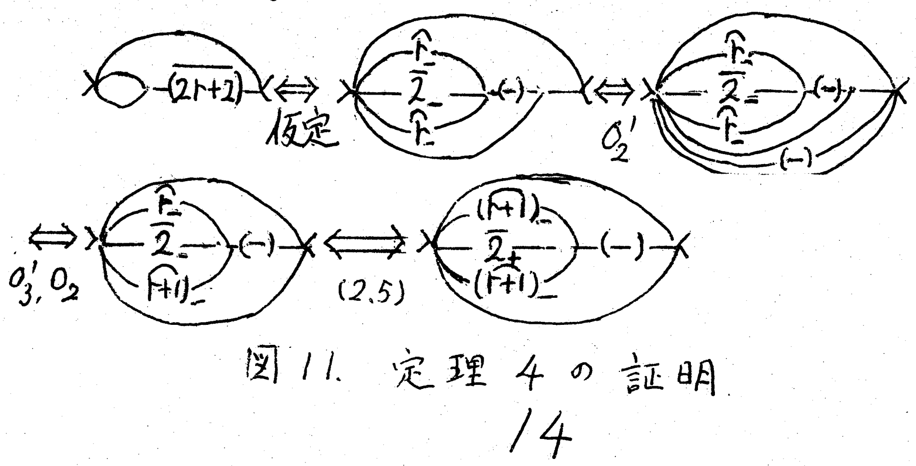
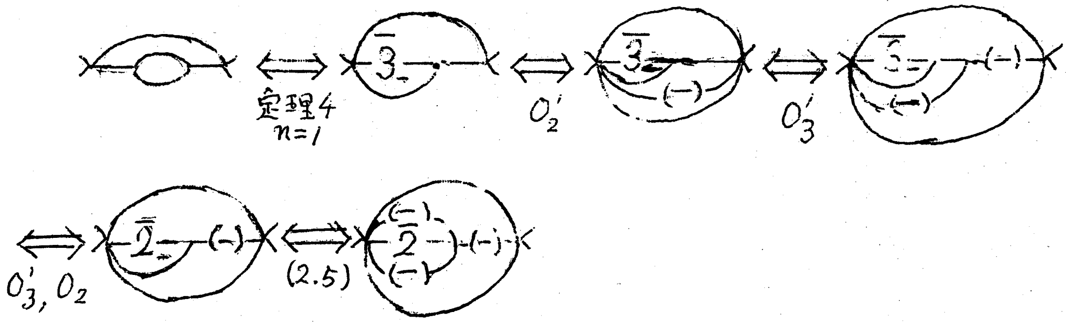


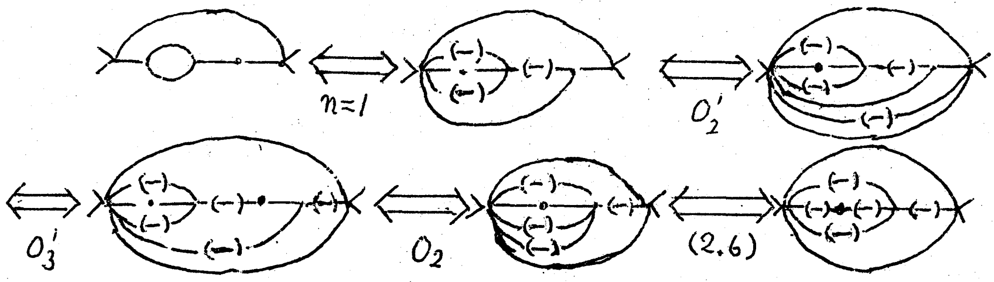
図11. 定理４の証明

定理5の証明。

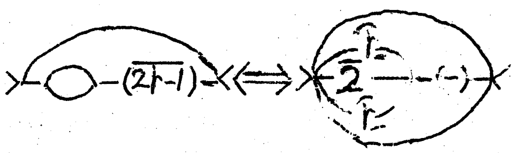
$n=1$ のとき



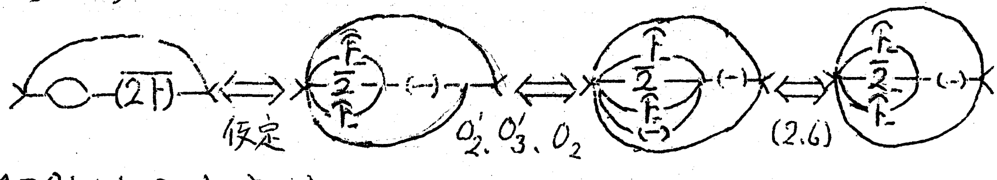
$n=2$ のとき



$n=2r-1$ のとき



を仮定すれば $n=2r$ のとき



$n=2r+1$ のときは

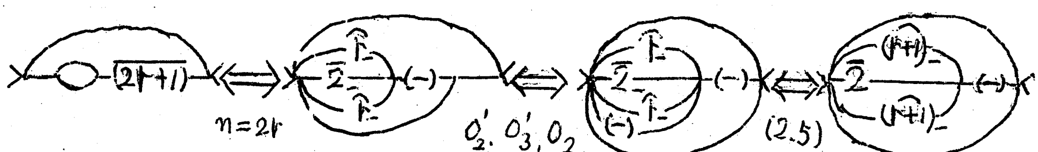
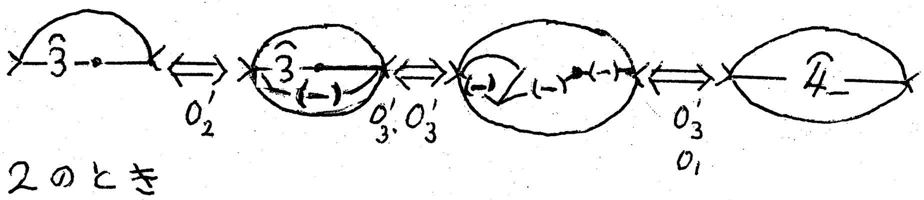


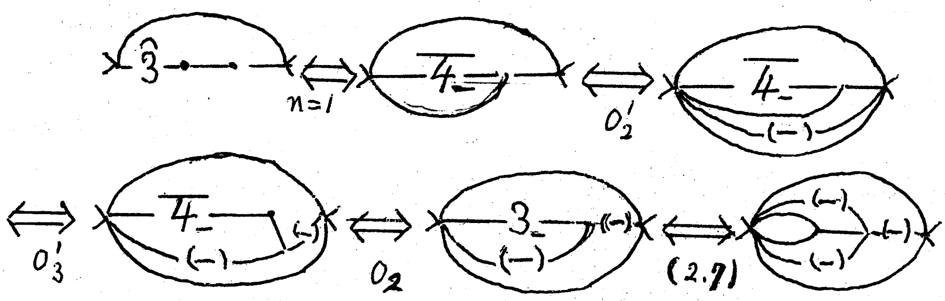
図12 定理5の証明

定理６の証明。

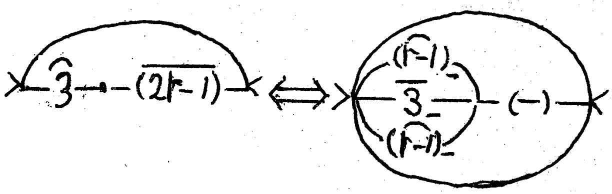
$n=1$ のとき



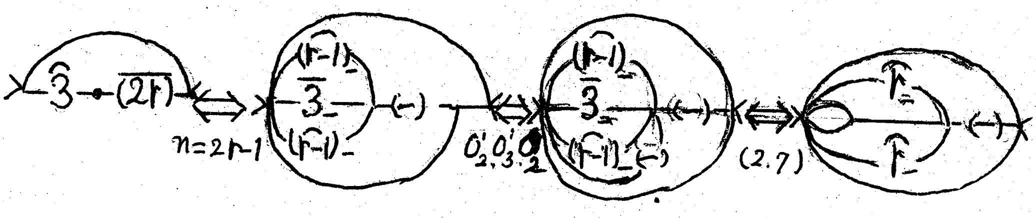
$n=2$ のとき



$n=2r-1$ のとき



を仮定して $n=2r$ のとき



さらに $n=2r+1$ のとき

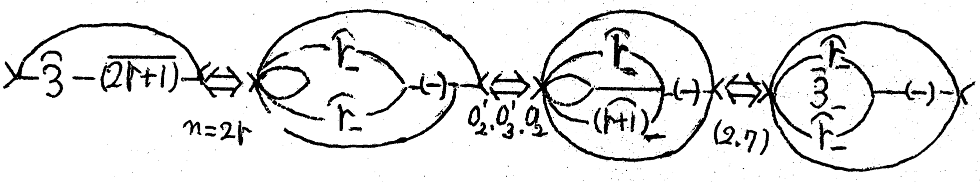
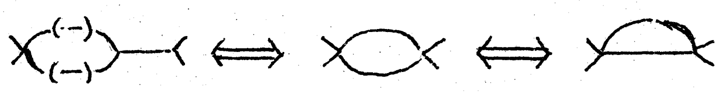


図13　定理６の証明

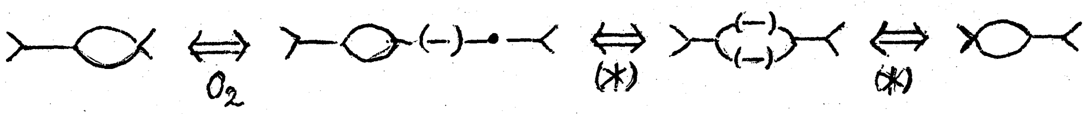
この論文は 4) (P.11) の定理3を拡張したものである。(5.1) と定理 3, 4, 5, 6 を組合せると 3) にある Alexander—Briggs の表に示された knot の範囲内では問題3は成立つ。

追加

寺阪英孝先生は定理5は定理4から次のようにして得られることを注意された。先生の何時もの御厚情に感謝します。

(*)  (定理8のために)

を使うと Block の左辺の弧を右辺に移すことができる。



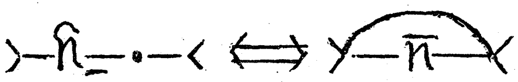
定理2の証明と同様にして次の定理が成立つ。

定理 7. 定理2の記号を使って、$>B\overset{\ell}{-}<$ が基本変形によって左右線対称の graph に変形できるならば

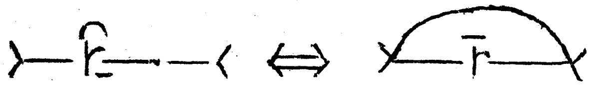
$$>B-< \iff >-B<$$

が成立つ。

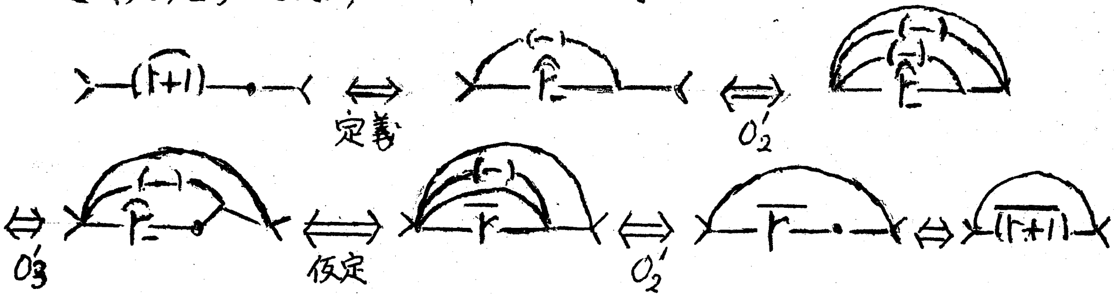
定理7の具体的な場合として次の定理が成立つ。

定理 8 

証明　n=2のときはP.17の(*)である。
n=rのとき



を仮定すれば，n=r+1のとき



References

I) T. Yajima and S. Kinoshita: On the Graphs of Knots, Osaka Math. J., 1957.

2) 寺阪英孝: 初等幾何学, 才2版, 岩波書店, 1973.

3) K. Reidemeister: Knoten Theorie, Chelsea. 1948.

4) H. Tokuda: On the Congruence of Graphs of Knots, General Education Review, Colledge of Agr. and Vet. Med. Nihon Univ. Vol. 9. 1973.