数理解析研究所講究録
219巻 1974年 103-108

Non-orientable closed manifold の Orientable manifold の中への写像について

関学 M2 崎田広造

証明したいことは，次の定理およびその系である。

［定理］ M^nを closed conneted non-orientable PL n-manifold, N^{n+1}を$H_n(N; Z_2)=0$をみたす orientable PL $n+1$-manifold とし，$f: M^n \longrightarrow N^{n+1}$を任意の PL map とする。また，$N(S_2(f); M)$を singular set $S_2(f)$のM^nにおける regular neighborhood とする。その時 $cl\{M^n - N(S_2(f); M)\} = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \cdots \cup \Sigma_r$

但し $\Sigma_i \cap \Sigma_j = \phi$ if $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \cdots r$

と書くことができて，各Σ_iは，compact orientable PL manifold with boundary になる。

［系］ M^nはN^{n+1}に embed できない。

定理を証明する前に，次の Lemma を証明しておく。

[Lemma] 前述のN^{n+1}に含まれるn次元 solid Klein Bottle $S^1 \times_\tau B^{n-1}$ をT^nとする。また，T^nの境界 ∂T^n $(=S^1 \times_\tau S^{n-2})$を$C^{n-1}$とする。この$T^n$の core，即ち $\mathrm{Int}\, B^{n-1}$から1点yをとり，$y \times S^1$ を考え，これをkとする。その時，$\mathrm{Link}[C^{n-1}, k] = 1 \bmod 2$ in N^{n+1}

[証明]

kのN^{n+1}における regular neighborhood $N(k; N^{n+1})$ を K とする。N^{n+1}が orientable であるから，明らかにKは $n+1$次元 solid torus である。また，k上の任意の1点xのN^{n+1}における regular neighborhood $N(x; N^{n+1})$ をDとすると，これは，明らかに $n+1$ - ball である。故に，xを始点とする1次独立で，どの2つも互いに直交する$n+1$個の vectors，$e_1, e_2, \cdots e_{n+1}$ が，この$n+1$-ball Dの中でとれて，e_1はk上の vector，$e_1, e_2, \cdots e_n$ はT^nの中で直交するようにできる。そこで，点xより始まって，kを∂K^{n+1}までe^{n+1}方向に動かすことを考える。xより少しe_1方向に動いたk上の点$x+\varepsilon$ において，$e_1, e_2, \cdots e_{n+1}$ であった vectorは，kに沿って，T^nを一周してくると，$x-\varepsilon$ において，$e_1, -e_2, -e_3, \cdots -e_n -e_{n+1}$ となっている。何故ならば，kはS^1と homeomorphic であるから，k上の vector e_1 は一周してきても，やはりe_1である。次に，$e_1, e_2, \cdots e_n$は，non-orientable manifold $T^n = S^1 \times \tau B^{n-1}$ の中の直交するvectors であって，一周してきても，e_1は変らないから，他の vectors $e_2, e_3, \cdots e_n$ の符号は反対になる。そして，最後に，例えば，$e_1, e_2, \cdots e_{n+1}$ を右手系にとっておくと，N^{n+1}は orientable であるから，kに沿って，T^nを一周しても，e_1 $e_2, \cdots e_{n+1}$が右手系であることには変りはない。一周すると $e_1, -e_2, -e_3, \cdots, -e_n$ となるから，e_{n+1} も $-e_{n+1}$ となる。そうすれば，$e_1, -e_2, \cdots -e_n, -e_{n+1}$ は始めの右手系と一致する。

故に，D内では，$D \cap T$が hyperplane となっていて，このn次元 hyperplane $D \cap T$の両側にkは押し出されたことになる。換言すると，$\mathring{D} \approx R^{n+1}$，$\mathring{D} \cap T \approx R^n$ であって，R^{n+1} のn次元 hyperplane R^n の両側にkは押し出されたことになる。だから，kは$\mathring{D} \cap T$と少なくとも，奇数個の点で交わることになる。故に，kとT^nとの Intersection number は 1 mod 2 となる。$\partial T^n = C^{n-1}$ であるから，kとC^{n-1}との Linking number も 1 mod 2 となる。即ち

$$\mathrm{Link}[C^{n-1}, k] = 1 \bmod 2 \quad \text{in } N^{n+1}$$

Q.E.D.

この場合，T^nは，non-orientable であるから，mod 2 で考えた。そして，C^{n-1}を bound する complex（この場合，T^n）のとり方にも依らないことが必要であるから，

$H_n(N^{n+1};Z_2)=0$ が必要であった。だから，証明では，τを動かしたが，逆に，τを固定して，T^nを動かすと考えてもよい。

［定理の証明］

M^nの三角形分割をKとする。

あるiに対して，もしΣ_iがnon-orientableと仮定すると次のようなn次元solid Klein Bottle T^nがΣ_iの中に存在する。すなわち，Σ_iの中には，次の条件(1)(2)を満たすn-simplexの有限列 $s=s_1, s_2, \cdots s_m, s_{m+1}=s$ が必ず存在する．

(1) $1 \leqq i \leqq m-1$ なるiに対して，s_iとs_{i+1}は共通の$(n-1)$-face Δ_i^{n-1}をもち，且つ同調している。

(2) s_mとs_{m+1}は共通の$(n-1)$-face Δ_m^{n-1}をもつが，同調はしていない。

このようなn-simplexの有限列はM^nの分割にかかわらず必ず存在する。 $T^n=s_1 \cup s_2 \cup \cdots \cup s_m$とすると，作り方より，$T^n$は non-orientable compact connected PL n-manifold であって，$T^n=S^1 \times_\tau B^{n-1}$となる。

$cl[M^n-T^n]=A^n$とおくと，$\partial T^n=\partial A^n$となり，これを$C^{n-1}$とおく。明らかに，$C^{n-1}=\partial T^n=S^1\times_\tau S^{n-2}$であって

closed connected non-orientable PL $(n-1)$-manifold である。

T'をT^nの first derived subdivision とする。$\overset{*}{\Delta}{}^n_i$, $\overset{*}{\Delta}{}^{n-1}_i$ ($i=1,2,\cdots m$) をそれぞれ, Δ^n_i, Δ^{n-1}_i の重心とする。$\overset{*}{\Delta}_i$ と $\overset{*}{\Delta}_i$ を結ぶT'の 1-simplex を P_i とする。$\overset{*}{\Delta}_i$ と $\overset{*}{\Delta}_{i+1}$ を結ぶT'の 1-simplex を g_i とする。$k=(P_1\cup g_1)\cup(P_2\cup g_2)\cup\cdots\cup(P_m\cup g_m)$ とおくと, 明らかに, kは $S^1\times(\mathrm{Int}\,B^n$の1点$)$ にT^nの中で isotopic である。今 $f: M^n\longrightarrow N^{n+1}$ を任意のPL map とすると, Z_i の作り方より, (° は内部)

$f(\mathring{T})\cap f(\mathring{A})=\phi$ であり, また singular set $S_2(f|Z_i)=\phi$ であるから, $f|Z_i$ は embedding である 故に, $f|T$ も embedding となる。以上のことより $f(C^{n-1})$ は $N^{n+1}-f(\mathring{T})$ で $f(A^n)$ を bound するから

$\boxed{1}$ $f(C^{n-1})\sim 0 \mod 2$ in $N^{n+1}-f(k)$

('$\sim$' means "homologous")

一方, Lemma より

$\mathrm{Link}[f(C^{n-1}), f(k)]=1 \mod 2$ in N^{n+1}

$\boxed{2}$ $\therefore f(C^{n-1})\nsim 0 \mod 2$ in $N^{n+1}-f(k)$

$\boxed{1}$, $\boxed{2}$ より矛盾が出る。

故に, Z_i ($i=1,2,\cdots r$) は orientable manifold である。

Q.E.D.

［系の証明］

もし，M^n が N^{n+1} に embed できたとすると，$S_2(f)=\phi$．よって，$M^n=\Sigma_1$ となり，矛盾である。何故ならば，M^n は non-orientable であり，また，定理より，Σ_1 は orientable となるから。 Q.E.D.

応用例

(1) 2次元 non-orientable manifold P_n は homology sphere の中に embed できない。

(2) 2次元 non-orientable manifold P_n は Lens space $\mathcal{L}(2m+1,\ q)$ の中に embed できない。

$\because$ $H_1(\mathcal{L})=Z_{2m+1}$， $H_2(\mathcal{L})=0$ であるから，universal coefficient theorem によって

$$H_2(\mathcal{L};Z_2)=0\otimes Z_2+Z_{2m+1}*Z_2=0$$