

Heegaard 分解と曲面上の曲線系について

東京工大 理学部 本向龍雄

genus n の二つの solid Torus T_1, T_2 と境界 \dot{T}_1 から境界 \dot{T}_2 への同相写像 $f: \dot{T}_1 \rightarrow \dot{T}_2$ があたえられたとき, \dot{T}_1 の各点 p と像 $f(p)$ を同一視してできる向きづけ可能な閉 3次元多様体 M を

$$M = \underbrace{T_1 \cup T_2}_f$$

と書き, M の f による Heegaard 分解 と呼ぶ。特に T_1, T_2 が M に含まれていて, $T_1 \cup T_2 = M$, $T_1 \cap T_2 = \dot{T}_1 = \dot{T}_2$ の場合は $f = \text{id.}$ とみなして, f を省略して

$$M = T_1 \cup T_2$$

と書き, 単に M の Heegaard 分解 と呼ぶ。「向きづけ可能な閉 3次元多様体が Heegaard 分解を持つ」ことはよく知られているが, この定理は 3次元多様体の単体分解可能性と同等である。

genus 1 の Heegaard 分解を持つ 3次元多様体 (Lens space) は分類ができて, 構造も決定されるので, genus

2 の場合を一例の研究目標とし、genus 2 の Heegaard 分解をもつ 3 次元多様体をできるだけ多く網羅し、その整理をしたいと心掛けている。また Heegaard 分解に関する代表的な結果を紹介する。

genus n の solid torus T において、互いに交わらない n 個の proper な disk D_1, D_2, \dots, D_n があって、 $T - D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_n$ が連結なとき、 $\{D_1, D_2, \dots, D_n\}$ を T の meridian disk の系、 $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ を meridian 系と呼ぶ。つぎの定理は明らかである。

定理 1 genus n の二つの solid torus T, T' の meridian 系 $\{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ (又は meridian disk の系 $\{D_1, D_2, \dots, D_n\}$) と $\{C'_1, C'_2, \dots, C'_n\}$ (又は $\{D'_1, D'_2, \dots, D'_n\}$) があれば、

$$F(C_1) = C'_1, F(C_2) = C'_2, \dots, F(C_n) = C'_n$$

$$(又は F(D_1) = D'_1, F(D_2) = D'_2, \dots, F(D_n) = D'_n)$$

を満足する同相写像 $F: T \rightarrow T'$ が存在する。

定理 2 同じ genus をもつ二つの Heegaard 分解 $M = T_1 \cup_f T_2$ と $M' = T'_1 \cup_{f'} T'_2$
$$\begin{array}{ccc} T_1 & \xrightarrow{f} & T_2 \\ \downarrow F & & \downarrow G \\ T'_1 & \xrightarrow{f'} & T'_2 \end{array}$$
 があり、また同相写像 $F: T_1 \rightarrow T'_1, G: T_2 \rightarrow T'_2$ があり、右の図が可換ならば、 M と M' は同相である。

証明 同相写像 $H: M \rightarrow M'$ を $H|_{T_1} = F, H|_{T_2} = G$

とおけば, ④の可換性より, well-defined である

定理2 より つぎの定理を得る。

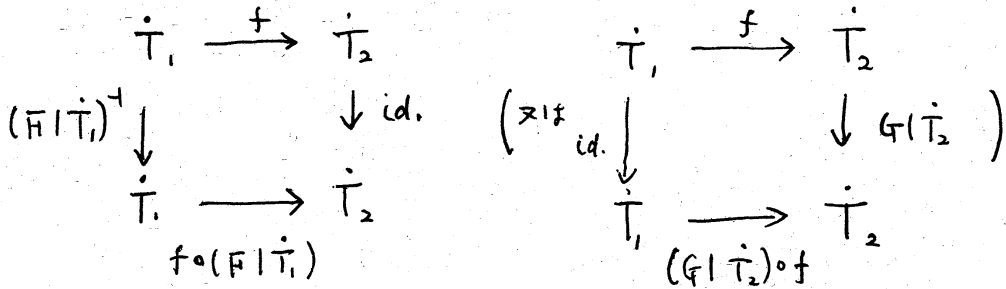
系1 Heegaard 分解 $M = T_1 \cup_f T_2$ において, $F: T_1 \rightarrow T_1$
(又は $G: T_2 \rightarrow T_2$) を同相写像とすると,

$$M' = \begin{matrix} T_1 \cup T_2 \\ f \circ (F|_{T_1}) \end{matrix}$$

$$\left(\text{又は } M'' = \begin{matrix} T_1 \cup T_2 \\ (G|_{T_2}) \circ f \end{matrix} \right)$$

は M と同相である。

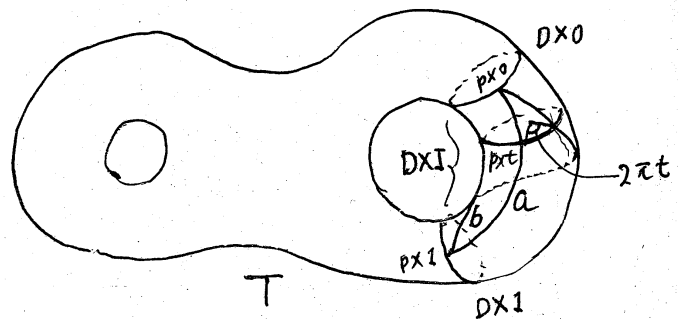
証明 つぎの図が可換であることを用いる。



Heegaard 分解を二つの多様体どうしの同相性を確かめる手段として, handle のひねり, わたり, cancel が"あるが", ひねりとわたりを図によって説明する。

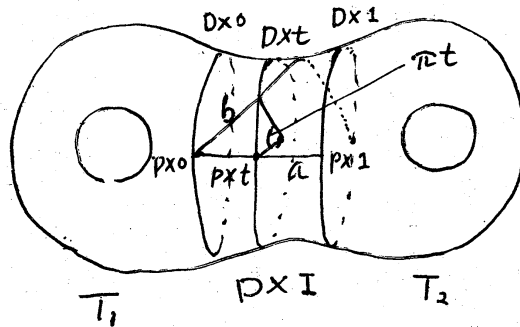
handle のひねり

(1) solid torus T は handle $D \times I$ ($\dot{T} \cap (D \times I) = \dot{D} \times I$) が埋め込ま



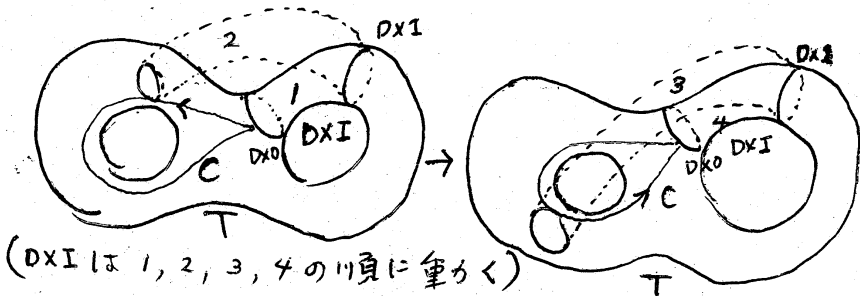
水ているとき, $D \times t$ を円板とみなして $2\pi t$ だけ回転し,
 $0 \leq t \leq 1$, $T - (D \times I)$ はそのまゝ動かさない T から T への
 同相写像を handle の 2π のひねり と呼ぶ。図のように線
 $a (= p \times I, p \in \dot{D})$ は線 b に導される。

(2) solid torus $T = D \times I$ ($\dot{T} \cap (D \times I) = \dot{D} \times I$) が
 埋め込まれていて, $T - D \times I$
 が連結でないとき, この $D \times I$
 を bridge と呼ぶ。 $D \times t$
 を円板と見なし, πt だけ
 回転し, $D \times I$ による T



は二つの部分 T_1 と T_2 に分割されるが, 図の T_1 はそのまま
 固定し, T_2 を π だけ回転する T の同相写像を, bridge の π
のひねり と呼ぶ。図の線 $a (= p \times I, p \in \dot{D})$ は b に導され
 る。 handle の 2π のひねり, bridge の π のひねり を絡纏
 して handle のひねり と呼ぶ。

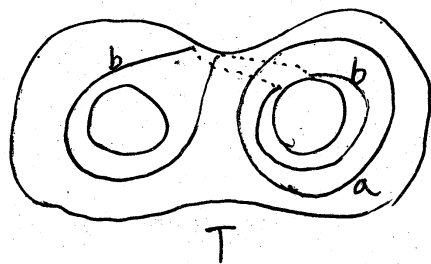
handle のあたり



図のよう
 に handle
 $D \times I$ を,
 $D \times I$ を固

($D \times I$ は 1, 2, 3, 4 の順に動かす)
 定したま, $D \times 0$ を向きをついた閉曲線 C 上を滑べらして, t

との位置にもどした結果できる同相写像を handle のあたり と呼ぶ。図のような閉曲線 a は handle のあたりによつて、閉曲線 b に早される。



Heegaard 分解 $M = T_1 \cup_f T_2$ が与えられたとき、handle のあたりとあたりを系 1 に適用して、簡単な Heegaard 分解に手直しすることが可能な場合が少なくない。

Heegaard 分解 $M = T_1 \cup_f T_2$ において、 T_1, T_2 の meridian 系をそれぞれ $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}, \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ とし、 $f(C_i) = B_i, i=1, 2, \dots, n$ とおくと、定理 1 及び定理 2 より M の構造は同相性を除いて、 $\{A_1, A_2, \dots, A_n, B_1, B_2, \dots, B_n\}$ により 完全に決定される。 $T_1 = N$ とし、 $\{N; A_1, A_2, \dots, A_n, B_1, B_2, \dots, B_n\}$ を Heegaard の diagram と呼ぶ。 N は genus n の閉曲面 N と、互いに交わらない単一閉曲線の系が $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ と $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ が与えられ、 $N - A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \neq N - B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n$ も連結であれば、 $\{N; A_1, A_2, \dots, A_n, B_1, B_2, \dots, B_n\}$ を Heegaard の diagram とする Heegaard 分解をもつ向きづけ可能な n 次元多様体が存在する。

$M = T_1 \cup_f T_2$ において、 $f(T_2)$ を再び T_2 とおきかえ、 $f = cd.$ とみなすことができるから、Heegaard diagram

$\{N; A_1, A_2, \dots, A_n, B_1, B_2, \dots, B_n\}$ の $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ と $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ は solid torus T_1 と T_2 の meridian 系と看えて差支えない。 N と \mathbb{R}^3 に交わらない単一閉曲線 $\{L_1, L_2, \dots, L_n\}$ があって、 A_i と L_i は1点で交わり (代数的にも幾何的にも) $A_i \cap L_j = \emptyset$, $i \neq j$, であるとき, $\{L_1, L_2, \dots, L_n\}$ を T_1 の longitude 系 と呼ぶ。

N の 整数係数の1次元 Homology 群 は $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$, $\{L_1, L_2, \dots, L_n\}$ に対応する 1-cycle $\pm \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$, $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ とすると, $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ を生成元とする自由加群である。 $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ に対応する 1-cycle を $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$ とすると, $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ と $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ がそれぞれ T_1 と T_2 の meridian 系であることより, $M = T_1 \cup T_2$ の整数係数の1次元 Homology 群 は T_1 の longitude 系に対応する 1-cycle $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ を生成元とし, T_2 の meridian 系に対応する 1-cycle を $\{\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_n = 0\}$ とする関係によって与えられる加群である。 M の Homology 群 $H_1(M)$ においては, $\beta_i = c_{i1}\lambda_1 + c_{i2}\lambda_2 + \dots + c_{in}\lambda_n$, $i=1, 2, \dots, n$, と表わすと, $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ が T_2 の meridian 系であることより, 係数 $\{c_{ij}\}$, $c_{ij}=1, 2, \dots, n$, の最大公約数は1である。

また $H_1(M)$ は行列表

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

によって完全に決定できる。さらに M が Homology-sphere に存在するため ($H_1(M) = \{0\}$) には、 T_1 の longitude 系が T_2 の meridian 系で表わされねばならず、表わしたとき、それ等の係数の最大公約数が 1 であることより、つぎの定理が成立する。

定理 3 M が Homology-sphere に存在するための必要十分条件は、 C の行列式 $|C|$ の値が ± 1 となることである。

次元 Homology 群の決定は、Heegaard diagram が与えられれば比較的簡単であるが、基本群は一般に可換でなく決定は面倒である。例えば定理 3 に対応するような Homology-sphere に関する定理は見当たらない。ただし基本群 $\pi_1(M)$ に関しても、生成元と関係だけは $H_1(M)$ の場合と全く同様である。 T_1 の longitude 系に対する道を $\{\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \dots, \hat{\lambda}_n\}$ 、 T_2 の meridian 系に対する道を $\{\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \dots, \hat{\beta}_n\}$ とおくと、つぎの定理が成立つ。

定理 4 基本群 $\pi_1(M)$ は $\{\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \dots, \hat{\lambda}_n\}$ を生成元、 $\hat{\beta}_1 = \hat{\beta}_2 = \dots = \hat{\beta}_n = 1$ を関係とする群である。

既に知られている Heegaard 分解に関する重要結果として
つぎのようなものがあげられる。

定理 5 3次元球面 S^3 の任意の Heegaard 分解 $S^3 = T_1 \cup T_2$ に対し, T_1 の meridian 系と T_2 の meridian 系を適当に選んで, T_2 の meridian 系が T_1 の longitude 系となるようにできる。(Waldhausen)

つぎの定理は自明であるが、良く用いられるのであげておく。

定理 6 genus n の Heegaard 分解 $M = T_1 \cup T_2$ において, T_1 の meridian と T_2 の meridian で一處だけ交換する (代数的にも幾何学的にも) ものが ~~存在~~ 存在すれば, genus $n-1$ の Heegaard 分解が存在する。

この定理はそれぞれ meridian に対する handle はないものと見てよいという意味である。これを handle の cancel と呼ぶ。すでに述べた handle のひねり, わたりでは genus は変化しなかったが, handle の cancel ができる場合は, genus が下るのであるから, Heegaard 分解は簡単になったと理解してよい。

二つの Heegaard 分解 $M = T_1 \cup T_2$ と $M' = T_1' \cup T_2'$ において, 同相写像 $F: M \rightarrow M'$ が存在し, $F(T_1) = T_1'$, $F(T_2) = T_2'$ を満足するとき, $M = T_1 \cup T_2$ と $M' = T_1' \cup T_2'$ は equivalent

であるという。また定理2の条件をみたす $M = T_1 \cup_f T_2$ と $M' = T_1' \cup_f T_2'$ は equivalent であると言っても同じである。

二つの Heegaard 分解 $M = T_1 \cup T_2$ と $M' = T_1' \cup T_2'$ に対し、さらに三番目の Heegaard 分解 $M'' = T_1'' \cup T_2''$ が存在し、 $T_1'' \cup T_2''$ を有限回 handle の cancel をすると $T_1 \cup T_2$ と equivalent となり、同様に $T_1'' \cup T_2''$ において有限回 handle を cancel すると $T_1' \cup T_2'$ と equivalent になるとき、 $M = T_1 \cup T_2$ と $M' = T_1' \cup T_2'$ は stably equivalent であるという。つぎの定理は3次元多様体に関する Hauptvermutung に関連している。

定理7 一つの M の二つの Heegaard 分解 $M = T_1 \cup T_2$ と $M = T_1' \cup T_2'$ は stably equivalent である。

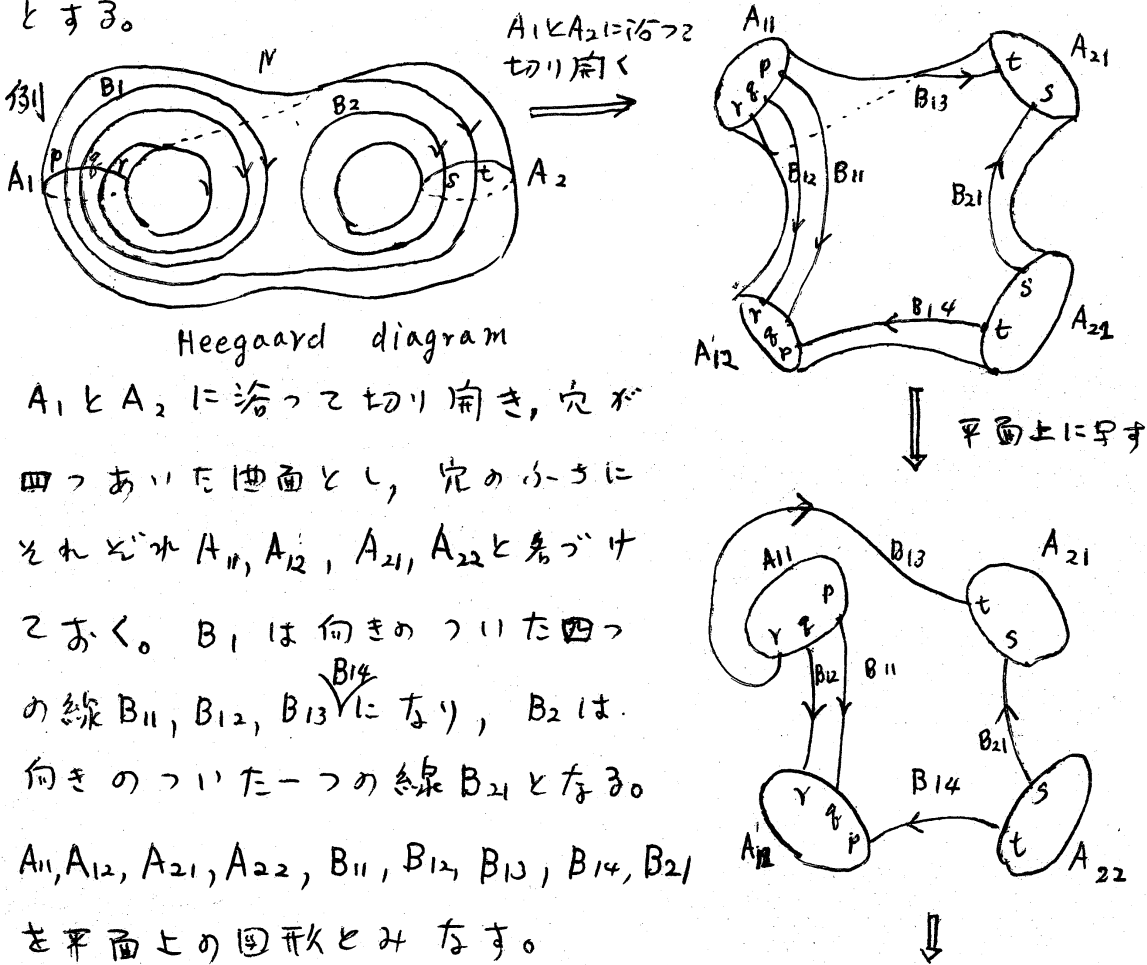
cancel 不可能な Heegaard 分解を 極小 であるという。多少乱暴であるがつぎのような予想もある。これは極小な Heegaard 分解は 最小 であるだろうという予想である。

予想 向きづけ可能な閉3次元多様体 M の二つの極小な Heegaard 分解 $M = T_1 \cup T_2$ と $M = T_1' \cup T_2'$ は equivalent である！

この予想は S^3 の場合と $S^2 \times S^1$ の場合に肯定的に解決されている。 S^3 の場合は定理5を使い。 $S^2 \times S^1$ の場合はつぎの Haken の結果を用いる。

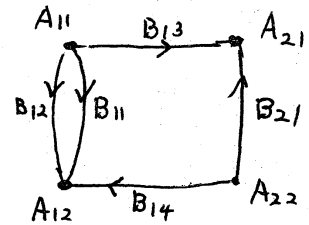
定理8. Heegaard 分解 $M = T_1 \cup T_2$ があつて, M の 2次元球面 S^2 で M の 3次元球の境界とならないうものが存在すれば, さらに M の 2次元球面 \bar{S}^2 が存在し, \bar{S}^2 と $\dot{T}_1 (= \dot{T}_2)$ の交わりは \dot{T}_1 上で homotop でない単一閉曲線となる。

Heegaard diagram を 有向 graph を用いて表わす方法があるので, 図を画いて説明する。Heegaard diagram $\{N; A_1, A_2, B_1, B_2\}$ において T_2 の meridian B_1 と B_2 に向きをきえておき, meridian 系どうしの交差を p, q, r, s, t とする。



$A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$ を結ぶて点とする
と、頂点が $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$ で、向き
のついた辺 $B_{11}, B_{12}, B_{13}, B_{14}, B_{21}$ をもつ
平面上の有向グラフ $G(M)$ を得る。

\Downarrow $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$
を点にする

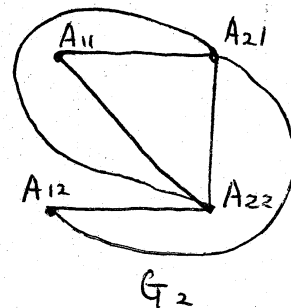
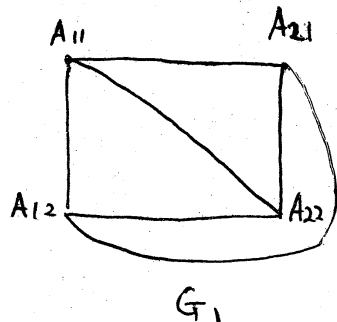


有向 Graph $G(M)$ の例

このように Heegaard diagram $M = T_1 \cup T_2$ が与えられたら、それから有向グラフ $G(M)$ をつくる

ことができ、逆に $G(M)$ から Heegaard diagram を再現することが可能である。genus n の Heegaard 分解においては、それを表わす平面上の有向グラフは、 T_1 の meridian 系に対する $2n$ 個の頂点と、 T_2 の meridian 系に対応する、向きをついた辺の集合系 n 個とから構成されている。相当複雑な Heegaard diagram でもこの有向グラフにするとはかなり簡単になるので、Heegaard 分解研究の手段として有力である。

特に genus 2 の Heegaard 分解の場合は、handle のひねり、わたり等¹⁰手法によって単純化すること、有向グラフ $G(M)$ において、向きを無視し同じタイプの辺を一まとめ



にして一つの辺と見なすことにより、図のような二種類の無向グラフに reduce される。従って genus 2 の Heegaard 分解をもつ 3次元多様体 M の位相的構造は無向グラフ G_1 または G_2 に属する有向グラフの構造によって決定でき、そのような有向グラフ $G(M)$ の構造の研究、分類が必要となる。

文献表

1. W. Haken : Some Results on Surfaces in 3-Manifolds. MAA Studies in Mathematics, Vol. 5.
2. C. D. Papakyriakopoulos ; Some Problems on 3-dim. Manifolds. Bull. Amer. Math. Soc. 64 (1958).
3. K. Reidemeister ; Zur Dreidimensionalen Topologie ; Abh. Math. Semin. Univ. Hamburg 9 (1933) 189~194.
4. H. Seifert und W. Threlfall ; Lehrbuch der Topologie ; Teubner, Leipzig, (1934).
5. J. Singer ; Three-dimensional Manifolds and their Heegaard-diagrams ; Trans. Amer. Math. Soc. 35 (1933) 88~111.
6. J. Stallings ; On Fiberings Certain 3-Manifolds and Related Topics. Prentice - Hall. (1962)

7. J. Stallings ; On the Loop Theory : Ann. Math.
72 (1960) P. 12 ~ 19.
8. F. Waldhausen, über Involution der 3-Sphäre;
Top. Vol. 8, P. 81 ~ 91.
9. F. Waldhausen, Heegaard-Zerlegung der 3-
Sphäre ; Topology, 7 (1968) P. 195 ~ 203.