数理解析研究所講究録
219巻 1974年 70-89

閉曲面上の閉曲線群について

上智大 理工　寺阪英孝

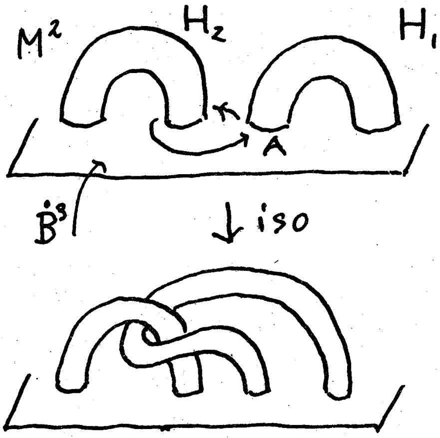
M^2 は genus $n\ (\geq 2)$ の閉曲面（2次元多様体）とし、M^2 を M^2 自身上に移す homeomorphism（以下 homeo と略す）を h とする。与えられた h を、以下で述べる基本的ないくつかの homeo の積として表わせるか、という問題を一つのめどとして、isotopy と homeo との関係、h の homology base による表現 matrix の諸性質、conjugate pair になっている曲線群と matrix との関係、これらの応用、などについて述べる。別に目新らしい事実はないが、何かのお役に立てば幸である。

§1.

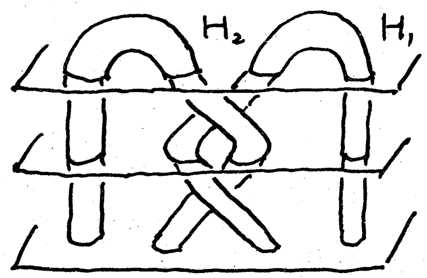
M^2 は、E^3 内の球体 ball B^3 に $n\ (\geq 2)$ 個の柄（handle）H_i をつけた3次元体 M^3 の境界 $M^2 = \partial M^3$ として、E^3 内で標準的な形で実現してあるものと考える。M^3 の柄を B^3 の表面上でならす isotopy から、M^2 の基本的と思われる homeo をもとめるつもりなので、その図形的な表示をまず与える。

(i) "くぐる"変換

柄 H_1 を $\dot{B}^3$ 上で動かし, H_2 の下をくぐって元に戻る

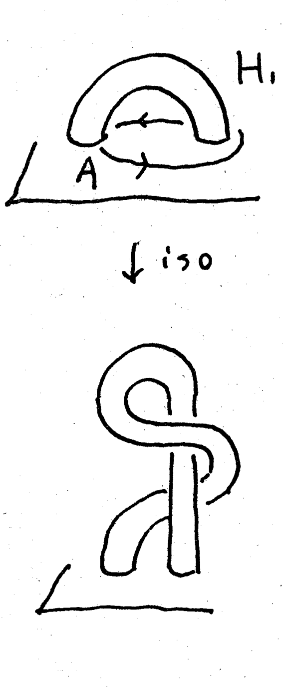


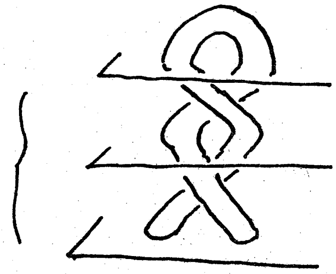
E^3 の ambient isotopy を考える. これは右図のように, H_1, H_2



の両足を延ばして行く図を画くと, 動きがよく分る. 右図は組み紐(braid)の形になっているのに注意.

(ii) "ねじる"変換

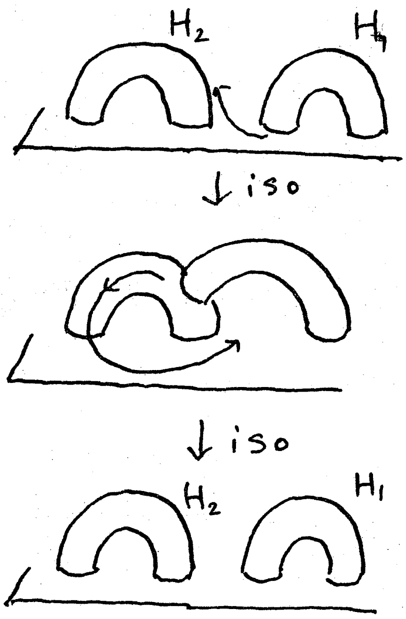


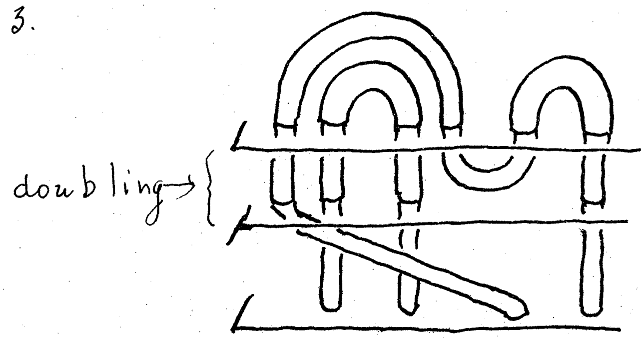


左図のように自身の周りを周るとき柄は必らずしもねじれるわけではないが, ねじることもできる. 柄を $\dot{B}^3$ 上では動かさずにねじるのは, 次の § で考える.

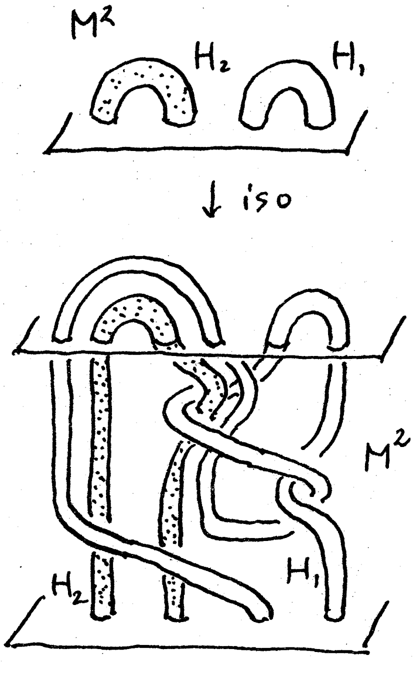
(iii) "わたる"変換

H_1 を H_2 を超えて，また元に戻す ambient isotopy である．ある段階で H_2 の double をつくり，H_1 とつなぐことで，H_1 が H_2 をこえることが右図で表わせる．

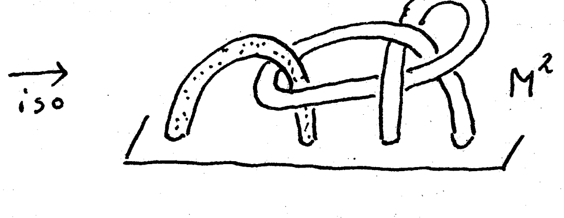




以上3種の isotopy を組合せると，例えば左図から下の右図までのように，M^2 は一見絡み合っていそうに見えるものに isotopy で移れることが分かる．



問1 braid theory との関係如何．



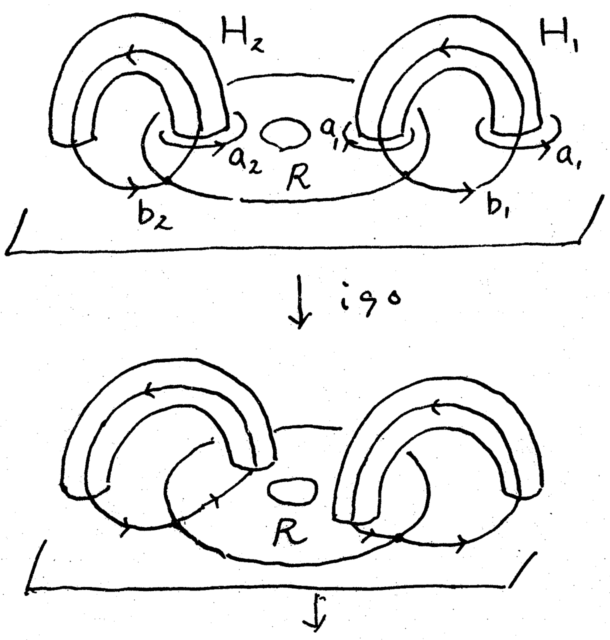
§2.

M^2 の iso と homeo. Homology base の変換

M^2 の homology base を仮りに $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n)$ で表わす. このうち, a_i は M^3 内に円盤が張れるものとする.

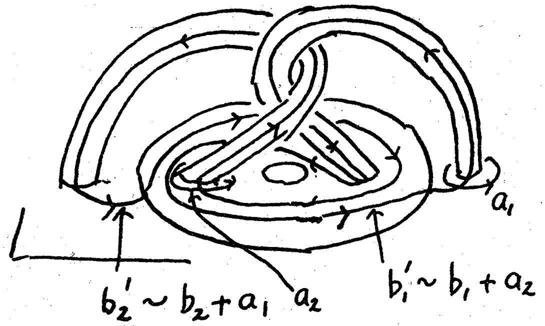
§1 で考えた "くぐる", "ねじる", "わたる" はいずれも最後に handle 上の homeo を重ねることによって, M^2 から M^2 自身上への homeo にすることができる. この homeo を今後, "くぐる", "ねじる", "わたる" homeo と呼ぶことにし, この § ではこのような homeo によって (a_i, b_i) がどう変化するかを調べる. 便宜上, H_i, H_j 間でなく, H_1, H_2 の対についてだけ考えることにする.

(i) "くぐる".

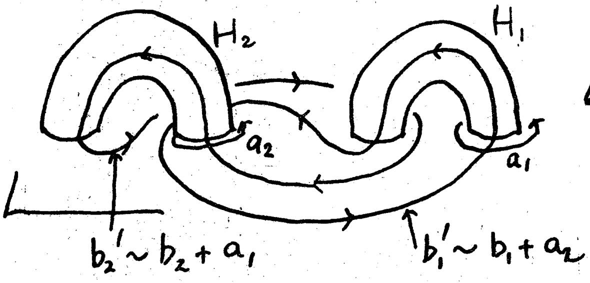


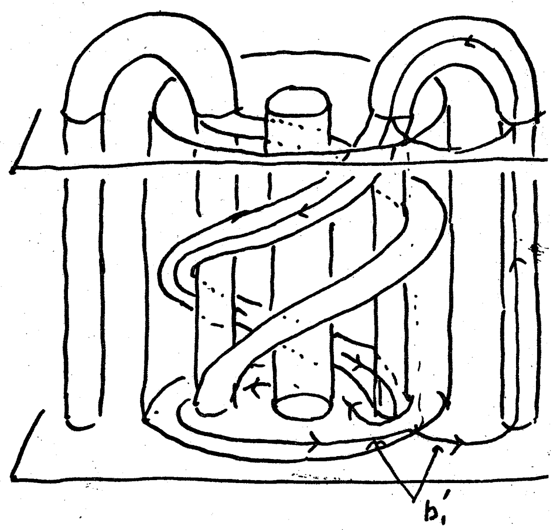
H_1, H_2 の片足だけを含む環状領域 R を作り, その周および外部は不動とし, 内部だけの isotopy で足を一周させて元に戻す. 足だけの運動は次頁の如く立体的に画ける

↓



↓ homeo



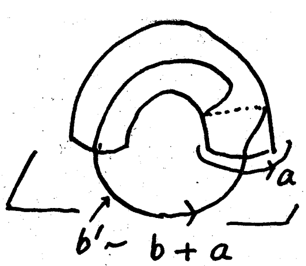


左上図は最終で、これから homeo によって絡み合いをとったのが下の図。ここで (a_1, b_1), (a_2, b_2) が (a_1', b_1') (a_2', b_2') に移ったとすれば、"くぐる" は

$a_1' \sim a_1$, $b_1' \sim b_1 + a_2$

$a_2' \sim a_2$, $b_2' \sim b_2 + a_1$.

(ii) "ねじる".



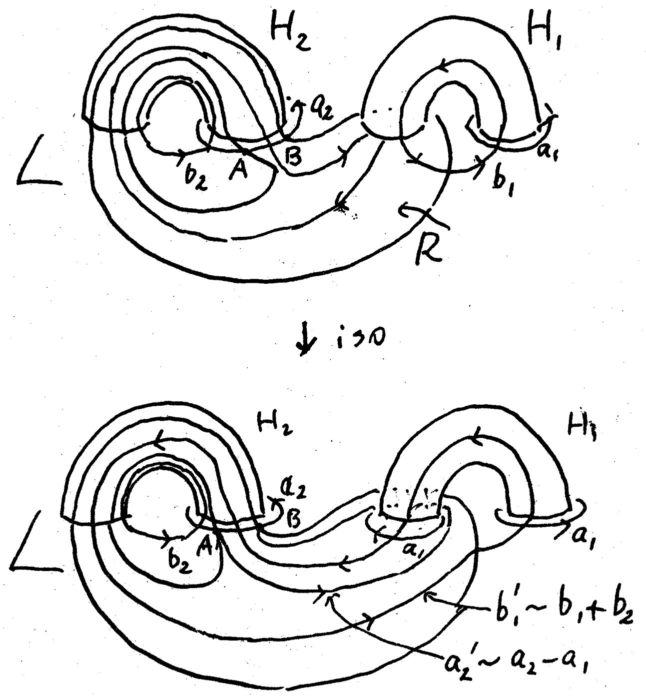
これは2頁の図でも左図でもよく、(a, b) が (a', b') に移るなら

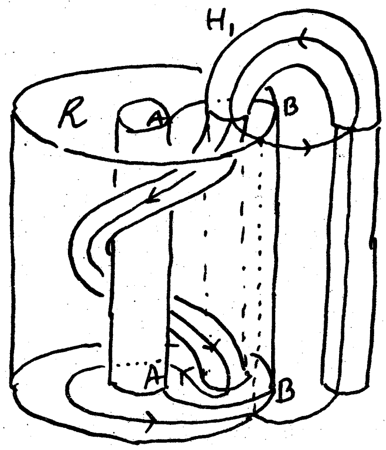
$a' \sim a$, $b' \sim b + a$

となる。

(iii) "わたる".

H_1 の足を含み H_2 を渡る環状領域 R の中で isotopy を行う. この isotopy の





(左の立体図)

とき, a_2 上の弧 $\widehat{AB}$ は H_1 の足を周る弧に変ることに注意.

すると, $M^2 \to M^2$ の homeo では

$$a_1' \sim a_1, \qquad b_1' \sim b_1 + b_2$$

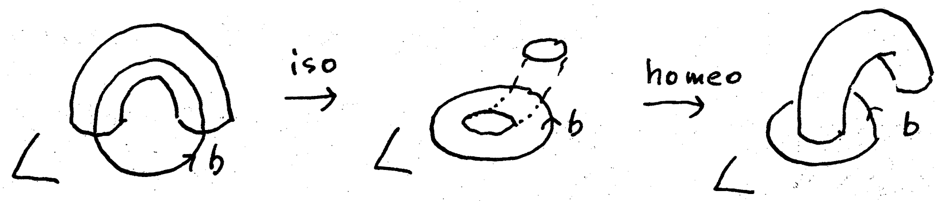
$$a_2' \sim a_2 - a_1, \quad b_2' \sim b_2$$

となることが分る.

(iv) 柄の"反転".

§2 では考えなかったが, これは次のような変換である. handle を今, 歩道橋と考えたとき, これを地下道に改めて車を通らせ, 更に地下道を車の通る陸橋にかえたとする. こ

れが交転である.



§3.

共役系 conjugate system と skew orthogonal matrix

M^2 の base $(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)$ を改めて $(e_1, e_2), \dots$ $(e_{2i-1}, e_{2i}), \dots, (e_{2n-1}, e_{2n})$ と書く.

M^2 上の cycle (閉曲線) α, β の homological の交点数を $\ell(\alpha, \beta)$ と書くと, 基本 cycle e_i 同志の交点数は

$$(1) \begin{cases} \ell(e_{2i-1}, e_{2i}) = -\ell(e_{2i}, e_{2i-1}) = 1 \\ \ell(e_\lambda, e_\mu) = 0 \quad (\lambda, \mu \text{ が他の組合せのとき}) \end{cases}$$

だから, ― 以後 homology を ~ でなく = で表わすと

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= a^1 e_1 + a^2 e_2 + \cdots + a^{2n} e_{2n} \\ \beta &= b^1 e_1 + b^2 e_2 + \cdots + b^{2n} e_{2n} \end{aligned}\right\} \quad \text{ならば}$$

$$\begin{aligned} \ell(\alpha, \beta) &= a^1 b^2 \ell(e_1, e_2) + a^2 b^1 \ell(e_2, e_1) + \cdots \\ &= (a^1 b^2 - a^2 b^1) + \cdots \\ &= \begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ b^1 & b^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a^3 & a^4 \\ b^3 & b^4 \end{vmatrix} + \cdots \cdots + \begin{vmatrix} a^{2n-1} & a^{2n} \\ b^{2n-1} & b^{2n} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

そこで

(2) $$\begin{cases} \beta = b^1 e_1 + b^2 e_2 + \cdots + b^{2n-1} e_{2n-1} + b^{2n} e_{2n} \\ \tilde{\beta} = b^2 e_1 - b^1 e_2 + \cdots + b^{2n} e_{2n-1} - b^{2n-1} e_{2n} \end{cases}$$ に対し

なる $\tilde{\beta}$ を導入すると, $l(\alpha, \beta)$ は scalar product $\alpha\tilde{\beta}$:

(3) $$\alpha\tilde{\beta} = l(\alpha, \beta) = \begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ b^1 & b^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a^3 & a^4 \\ b^3 & b^4 \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} a^{2n-1} & a^{2n} \\ b^{2n-1} & b^{2n} \end{vmatrix}$$

となるが, $\alpha\tilde{\beta} = -\beta\tilde{\alpha}$ だから $\alpha\tilde{\beta}$ を α と β の <u>skew scalar product</u> といい, $\alpha\tilde{\beta} = 0$ のとき, α と β は互いに <u>skew orthogonal</u> だという。

homeo $h: M^2 \to M^2$ で $e_1, e_2, \ldots, e_{2n}$ が $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n}$ に移ったとすれば $l(\alpha_\lambda, \alpha_\mu) = l(e_\lambda, e_\mu)$ だから, (1) から

(4) $$\begin{cases} \alpha_{2i-1}\tilde{\alpha}_{2i} = 1 \\ \alpha_\lambda \tilde{\alpha}_\mu = 0 \quad (\text{他の場合}) \end{cases}$$

$\alpha_{2i-1}, \alpha_{2i}$ を <u>conjugate pair</u> という

homeo h を matrix で表現すると

$$\begin{array}{c|cc|cc|c|cc|} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & \cdots & e_{2n-1} & e_{2n} \\ \hline \alpha_1 & a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 & & a_1^{2n-1} & a_1^{2n} \\ \alpha_2 & a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & a_2^4 & \cdots & a_2^{2n-1} & a_2^{2n} \\ \hline \alpha_3 & a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & a_3^4 & & a_3^{2n-1} & a_3^{2n} \\ \alpha_4 & a_4^1 & a_4^2 & a_4^3 & a_4^4 & & a_4^{2n-1} & a_4^{2n} \\ \hline \vdots & & & & & & & \end{array}$$

ただし

$$e_\lambda \xrightarrow{h} \alpha_\lambda = \sum_{\rho=1}^{2n} a_\lambda^\rho e_\rho$$

(2), (3), (4) から次のような matrix の積を計算すると

$$
(5)\quad
\begin{array}{c|ccccc|}
 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_{2n} \\
\hline
\alpha_1 & a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 \cdots & a_1^{2n} \\
\alpha_2 & a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & a_2^4 \cdots & a_2^{2n} \\
\hline
\alpha_3 & a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & a_3^4 \cdots & a_3^{2n} \\
\alpha_4 & a_4^1 & a_4^2 & a_4^3 & a_4^4 \cdots & a_4^{2n} \\
\hline
 & \cdots & & & &
\end{array}
\;
\begin{array}{|cc|c}
\tilde{\alpha}_2 & -\tilde{\alpha}_1 & \\
\hline
a_2^2 & -a_1^2 & \vdots \\
-a_2^1 & a_1^1 & \vdots \\
a_2^4 & -a_1^4 & \vdots \\
-a_2^3 & a_1^3 & \vdots \\
\vdots & \vdots &
\end{array}
=
\begin{array}{c|cc|c}
 & \tilde{\alpha}_2 & -\tilde{\alpha}_1 & \\
\hline
\alpha_1 & \alpha_1\tilde{\alpha}_2 & -\alpha_1\tilde{\alpha}_1 & \cdots \\
\alpha_2 & \alpha_2\tilde{\alpha}_2 & -\alpha_2\tilde{\alpha}_1 & \\
\hline
\alpha_3 & \alpha_3\tilde{\alpha}_2 & -\alpha_3\tilde{\alpha}_1 & \cdots \\
\alpha_4 & \alpha_4\tilde{\alpha}_2 & -\alpha_4\tilde{\alpha}_1 & \\
\hline
 & \cdots & &
\end{array}
$$

$$= 1 \quad (\text{単位 matrix})$$

(a_λ^μ) を <u>skew orthogonal matrix</u> といい，$\alpha_1, \ldots, \alpha_{2n}$ を <u>full conjugate system</u> という．すると

<u>定理 1.</u> 基本の full conjugate system $e_1, \ldots, e_{2n}$ を homeo h で移したものを $\alpha_1, \ldots, \alpha_{2n}$ とすれば，これは skew orthogonal matrix で表現できる．

上の matrix の計算には次の小行列が有効である．

(6) $\quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のとき $\tilde{A} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ とすれば

(7) $\quad A\tilde{A} = \begin{pmatrix} |A| & 0 \\ 0 & |A| \end{pmatrix}$ だから，これを使うと

<u>補題 1.</u> $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ ならば

$$(AB)^\sim = \tilde{B}\tilde{A}. \quad \square$$

そこで $A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{2i-1}^{2j-1} & a_{2i-1}^{2j} \\ a_{2i}^{2j-1} & a_{2i}^{2j} \end{pmatrix}$ のとき

$\mathbb{A} = (A_{ij})$ に対して $\tilde{\mathbb{A}} = (\tilde{A}_{ji})$ とすれば

(5) は

(8) $\mathbb{A}\tilde{\mathbb{A}} = (A_{ij})(\tilde{A}_{ji}) = \left(\sum A_{ip}\tilde{A}_{pj}\right) = 1.$ 即ち

(9) $\mathbb{A} = (A_{ij})$ が skew orthogonal とは (8) が成立することである.

これを用いると容易に

<u>定理 2.</u> $\mathbb{A}$, $\mathbb{B} = (B_{ij})$ が skew orthogonal ならば $\mathbb{A}\mathbb{B}$ も skew orthogonal である. □

§4

Skew orthogonal system の作り方

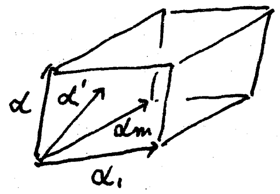
$e_1, e_2, \dots, e_{2n}$ を単位 vector とする実 vector 空間を V^{2n} とする.

$m\ (\leq 2n)$ 個の一次独立な整数 vector $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ の張る linear subspace $L(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ 上のどの integer vector ξ も, 整数系数 $x_1, \dots, x_m$ により

$$\xi = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m$$

で表わせるとき, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ を素一次独立, 略して<u>素独立</u>(*)という. すると明かに (*primely independent)

(10) 整数 vector $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ が一次独立で，このうち $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ が素独立ならば，$\alpha' \in L(\alpha, \alpha_1, \dots \alpha_m)$ を適当にもとめると $L(\alpha', \alpha_1, \dots, \alpha_m) = L(\alpha, \alpha_1, \dots \alpha_m)$ で且 $\alpha', \alpha_1, \dots, \alpha_m$ は素独立であるようにできる.



($\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ からできる超平行多面体中に $L(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ に最も近い vector α' を探せばよい.) (10) から容易に

<u>定理 3.</u> 整数 vector $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ について次の四つは同値である：

(i) $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ は素独立である.

(ii) $\alpha_{m+1}, \dots, \alpha_{2n}$ をもとめて $\alpha_1, \dots, \alpha_{2n}$ が素独立であるようにできる.（このとき (iii) が成立つ）

(iii) $\alpha_{m+1}, \dots, \alpha_{2n}$ をもとめて $\det|\alpha_1, \dots, \alpha_{2n}| = 1$ であるようにできる.（このとき (ii) が成り立つ）

(iv) matrix $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ のすべての m 次の部分行列式は最大公約数が 1 である. □

これより

<u>定理 4.</u> $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5, \dots, \alpha_{2i-1}$ $(1 \leqq i \leqq n)$ が (i) 互いに skew orthogonal, (ii) 素独立, ならば, 適当に $\alpha_2, \alpha_4, \dots, \alpha_{2n}$ を加えて, $\alpha_{2k-1}, \alpha_{2k}$ が conjugate pair

であるような full conjugate system $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n}$ をつくることができる.

(証) 条件(ii)から定理3(iii)または(iv)により

$$
\begin{array}{c|ccccc}
\alpha_1 & a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 \cdots & a_1^{2n} \\
'\alpha_2 & 'a_2^1 & 'a_2^2 & 'a_2^3 & 'a_2^4 \cdots & 'a_2^{2n} \\
\hline
\alpha_3 & a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & a_3^4 \cdots & a_3^{2n} \\
'\alpha_4 & 'a_4^1 & 'a_4^2 & 'a_4^3 & 'a_4^4 \cdots & 'a_4^{2n} \\
\hline
\vdots & & \cdots & \cdots & &
\end{array}
$$

(11) $\det|\alpha_1\ '\alpha_2\ \alpha_3\ '\alpha_4 \cdots\ '\alpha_{2n}| = 1$

であるような $'\alpha_2, '\alpha_4, \dots, '\alpha_{2n}$ が求まる. すると(11)から

$$
(12)\left\{
\begin{array}{l}
a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + \cdots + a_1^{2n} x_{2n} = 1 \\
'a_2^1 x_1 + 'a_2^2 x_2 + \cdots + 'a_2^{2n} x_{2n} = 0 \\
\qquad \cdots \\
'a_{2n}^1 x_1 + 'a_{2n}^2 x_2 + \cdots + 'a_{2n}^{2n} x_{2n} = 0
\end{array}
\right.
$$

を満たす $x_1, \dots, x_{2n}$ がただ一組求まる. そこで

$\xi = -x_2 e_1 + x_1 e_2 - x_4 e_3 + x_3 e_2 \cdots + x_{2n-1} e_{2n}$ とおけば

$\tilde{\xi} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_{2n} e_{2n}$

だから, (12)を書き直すと

(13) $\alpha_1 \tilde{\xi} = 1,\quad '\alpha_2 \tilde{\xi} = 0,\quad \alpha_3 \tilde{\xi} = 0, \dots\quad '\alpha_{2n} \tilde{\xi} = 0$

i) ここでもし

$\xi = y_1 \alpha_1 + y_2 \alpha_3 + \cdots + y_i \alpha_{2i-1}$ だったなら, $\tilde{\alpha}_1$

をかけると，(13) および (3), (4) から $\xi\tilde{\alpha}_1=0$ 即ち

$-1=0$ で矛盾 故に $\xi, \alpha_1, \alpha_3, \dots, \alpha_{2i-1}$ は一次独立.

ii) 次に $L(\xi, \alpha_1, \alpha_3, \dots, \alpha_{2i-1})$ から ξ' をもとめて，ξ',

$\alpha_1, \alpha_3, \dots, \alpha_{2i-1}$ が素独立であるようにできるから

$$\xi = x\xi' + a_1\alpha_1 + a_2\alpha_3 + \cdots + a_i\alpha_{2i-1}$$

にできるが，両辺に $\tilde{\alpha}_1$ をかけると (13) から

$$-1 = x\xi'\tilde{\alpha}_1 \qquad \therefore\ x=\pm 1$$

$$\therefore\ \pm\xi' = \xi - (a_1\alpha_1 + \cdots + a_i\alpha_{2i-1})$$

$$\therefore\ L(\alpha_1, \alpha_3, \dots, \alpha_{2i-1}, \xi') = L(\alpha_1, \dots, \alpha_{2i-1}, \xi)$$

故に $\xi, \alpha_1, \alpha_3, \dots, \alpha_{2i-1}$ は素独立. 従って $\alpha_2=\xi$

とおけば (13) から $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{2i-1}$ が (i)

$\alpha_1\tilde{\alpha}_2=1$ の外は skew orthogonal, (ii) 素独立になる.

以下同様にして $\alpha_4, \alpha_6, \dots, \alpha_{2i}$ をもとめ，

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_{2i-1}, \alpha_{2i} \quad \text{において}$$

$\alpha_{2k-1}, \alpha_{2k}$ は conjugate pair, 他は互いに skew orthogonal, 全体として素独立であるようにできる.

このとき，$i<n$ ならば，$\alpha_1, \dots, \alpha_{2i}$ が素独立であることから $'\alpha_{2i+1}, \dots, '\alpha_{2n}$ をもとめて $\alpha_1, \dots, \alpha_{2i}, '\alpha_{2i+1}, \dots '\alpha_{2n}$ が素独立であるようにできる. そこで今

$$\alpha_{2n+1} = (-'\alpha_{2i+1}\tilde{\alpha}_2)\alpha_1 + ('\alpha_{2i+1}\tilde{\alpha}_1)\alpha_2 + \cdots + ('\alpha_{2i+1}\tilde{\alpha}_{2i-1})\alpha_{2i} + '\alpha_{2i+1}$$

とおけば，$\alpha_{2i+1}\tilde{\alpha}_1=0, \dots, \alpha_{2i+1}\tilde{\alpha}_{2i}=0$ だから

今までと同様な条件がみたされているので α_{2i+2} が求まり，遂に full conjugate system が求まる．□

この定理とその証明から，次の一般の定理が導かれる：

<u>定理5.</u> (i) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2m-1}, \alpha_{2m}$ は $\alpha_{2\lambda-1}, \alpha_{2\lambda}$ が conjugate pair であり，(ii) 他の組合せは skew orthogonal (iii) $\alpha_1, \dots, \alpha_{2m}, \alpha_{2m+1}, \alpha_{2m+3}, \dots, \alpha_{2m'+1}$ は素独立ならば，これを full conjugate system $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n}$ まで拡大できる．（ここで $m=0$, $m'=0$, $m=m'=0$ のどれが起ってもよい）□

§5

基本 homeo の matrix

(i) "くぐる" は，H_i が H_j をくぐる（逆も同じ）向きの違い ($\varepsilon = \pm 1$) と，柄の"反転"とを考慮すると，

$$\begin{cases} \alpha_{2i-1} = e_{2i-1} + \varepsilon e_{2j}, & \alpha_{2i} = e_{2i} \\ \alpha_{2j-1} = e_{2j-1} + \varepsilon e_{2i}, & \alpha_{2j} = e_{2j} \end{cases} \quad (\varepsilon = \pm 1)$$

又は

$$\begin{cases} \alpha_{2i-1} = e_{2i-1}, & \alpha_{2i} = e_{2i} + \varepsilon e_{2j-1} \\ \alpha_{2j-1} = e_{2j-1}, & \alpha_{2j} = e_{2j} + \varepsilon e_{2i-1} \end{cases} \quad (\varepsilon = \pm 1)$$

matrix では左の通り．

$$\begin{array}{c|cc|cc|cc|c}
 & e_1 & e_2 & e_{2i-1} & e_{2i} & e_{2j-1} & e_{2j} & \cdots \\
\hline
\alpha_1 & 1 & & & & & & \\
\alpha_2 & & 1 & & & & & \cdots \\
\hline
\alpha_{2i-1} & & & 1 & & & \varepsilon & \cdots \\
\alpha_{2i} & & & & 1 & (\varepsilon) & & \\
\hline
\alpha_{2j-1} & & & & \varepsilon & 1 & & \cdots \\
\alpha_{2j} & & & (\varepsilon) & & & 1 & \\
\hline
\cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots &
\end{array}$$

（空所は 0）

（ε か (ε) かどちらかは 0）

(ii) "ねじる" は次の二通りを考える.

$$\begin{array}{c|c|cc|c}
 & & e_{2i-1} & e_{2i} & \\ \hline
 & \begin{matrix}1 & \\ & 1\end{matrix} & & & \cdots \\ \hline
\alpha_{2i-1} & & 1 & \varepsilon & \cdots \\
\alpha_{2i} & & (\varepsilon) & 1 & \\ \hline
 & \vdots & & \cdots &
\end{array}$$

$\alpha_{2i-1} = e_{2i-1} + \varepsilon e_{2i}$, $\alpha_{2i} = e_{2i}$ $(\varepsilon = \pm 1)$

または

$\alpha_{2i-1} = e_{2i-1}$, $\alpha_{2i} = e_{2i} + \varepsilon e_{2i-1}$ $(\varepsilon = \pm 1)$

(ε, (ε) のどちらかは 0)

(iii) "わたる" は次の二通を考える.

$$\begin{array}{c|c|cc|cc|c}
 & & e_{2i-1} & e_{2i} & e_{2j-1} & e_{2j} & \\ \hline
 & \begin{matrix}1 & \\ & 1\end{matrix} & & & & & \cdots \\ \hline
\alpha_{2i-1} & & 1 & & -\varepsilon & & \\
\alpha_{2i} & & & 1 & & (-\varepsilon) & \cdots \\ \hline
\alpha_{2j-1} & & (\varepsilon) & & 1 & & \\
\alpha_{2j} & & & \varepsilon & & 1 & \cdots \\ \hline
 & \vdots & & & \cdots & &
\end{array}$$

$$\begin{cases} \alpha_{2i-1} = e_{2i-1} - \varepsilon e_{2j-1}, & \alpha_{2i} = e_{2i} \\ \alpha_{2j-1} = e_{2j-1}, & \alpha_{2j} = e_{2j} + \varepsilon e_{2i} \end{cases}$$

または $(\varepsilon = \pm 1)$

$$\begin{cases} \alpha_{2i-1} = e_{2i-1}, & \alpha_{2i} = e_{2i} - \varepsilon e_{2j} \\ \alpha_{2j-1} = e_{2j-1} + e_{2j}, & \alpha_{2j} = e_{2j} \end{cases}$$

(空欄は 0)($(\varepsilon, -\varepsilon)$ か $((-\varepsilon), (\varepsilon))$ のどちらか 0). $(\varepsilon = \pm 1)$

すぐ確かめられるように

<u>定理 6</u> "くぐる", "ねじる", "わたる" の matrix はすべて skew orthogonal である. □

いま簡単の為 $n = 2$ の場合について "くぐる, ねじる, わたる" の homeo を考えてみると, 空欄は 0 として

$$\begin{cases}
\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \varepsilon & & \\ & 1 & & \\ \hline & & 1 & \\ & & & 1 \end{array}\right) = A^{1\varepsilon}, &
\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & & \varepsilon & \\ & 1 & & \\ \hline & & 1 & \\ & -\varepsilon & & 1 \end{array}\right) = B^{\varepsilon 0}, &
\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & & \varepsilon & \\ & 1 & & \\ \hline & \varepsilon & 1 & \\ & & & 1 \end{array}\right) = B^{0\varepsilon} \\[2ex]
\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & & & \\ \varepsilon & 1 & & \\ \hline & & 1 & \\ & & & 1 \end{array}\right) = A_{\varepsilon 1} &
\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & & & \\ & 1 & & \varepsilon \\ \hline -\varepsilon & & 1 & \\ & & & 1 \end{array}\right) = B_{0\varepsilon}, &
\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & & & \\ & 1 & \varepsilon & \\ \hline & & 1 & \\ \varepsilon & & & 1 \end{array}\right) = B_{\varepsilon 0}
\end{cases}$$

(14) $\left(\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\varepsilon\\&&&1\end{pmatrix} = D^{1\varepsilon},\ \begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&\varepsilon&1\end{pmatrix} = D_{\varepsilon 1}.\right.$ の8種がある.

すると elementary な計算で

$$B^{0\varepsilon} D_{11} D^{1-1} B^{-\varepsilon 0} D^{11} D_{-11} = 1 \quad \therefore \begin{cases} B^{0\varepsilon} = D_{11} D^{1-1} B^{\varepsilon 0} D^{11} D_{-11} \\ B^{\varepsilon 0} = D^{11} D_{-11} B^{0\varepsilon} D_{11} D^{1-1} \end{cases} \text{(dual)}$$

(15)

$$B_{\varepsilon 0} D^{11} D_{-11} B_{0-\varepsilon} D_{11} D^{1-1} = 1 \quad \therefore \begin{cases} B_{\varepsilon 0} = D^{11} D_{-11} B_{0\varepsilon} D_{11} D^{1-1} \\ B_{0\varepsilon} = D_{11} D^{1-1} B_{\varepsilon 0} D^{11} D_{-11} \end{cases} \text{(dual)}$$

即ち

<u>定理7</u>. "ねじる"があれば, "わたる" ⇔ "くぐる". □

さて, "ねじる", "わたる" は skew orthogonal matrix で表わせるから, 定理2を用いると, 次の定理が証明できる:

<u>定理8.</u> Skew orthogonal matrix は わたる, ねじる の両 skew orthogonal matrix の積で表わせる.

(証)

$$\begin{array}{c|cc|cc|l} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & \\ \hline \alpha_1 & a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 & \cdots \\ \alpha_2 & a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & a_2^4 & \cdots \\ & \cdots & & \cdots & & \end{array}$$

→ は"ねじる" matrix $A^{1\varepsilon}, A_{\varepsilon 1}$ ((14) 参照) によって

$$\begin{array}{c|cc|cc|} \alpha_1 & d_1 & 0 & d_2 & 0 \\ \alpha_2 & & * & & * \\ \hline \end{array}$$

← に直おす. $d_i = (a_1^{2i-1}, a_1^{2i})$ で $(d_1, d_2, \ldots, d_n) = 1$ だから $B^{\varepsilon 0}$, $B_{0\varepsilon}$ で

$$\begin{array}{c|cc|cc|} \alpha_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & a_2^1 & a_2^2 & * & * \\ \hline \end{array}$$

← に直おす.

すると

$$\begin{array}{c|cc|cc}
\alpha_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \cdots \\
\alpha_2 & a_2^1 & 1 & * & \cdots \\
\hline
 & \cdots & & \cdots &
\end{array}$$

$$1 = \alpha_1 \cdot \tilde{\alpha}_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ & * \end{vmatrix} + \cdots$$

$\therefore\ a_2^2 = 1$

$$\begin{array}{c|cc|cc}
\alpha_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \cdots \\
\alpha_2 & 0 & 1 & d_2' & 0 \cdots \\
\hline
 & \cdots & & \cdots &
\end{array}$$

上 matrix に $A_{\varepsilon l}$ を施して左になる．($a_2^1 = 0$, $a_2^{2i} = 0$)．ここで $d_2' = (a_2^3, a_2^4)$, etc. これに $B_{\varepsilon 0}$ で，左になる*) すると $\lambda \geq 3$ のとき

$$\begin{array}{c|cc|cc}
\alpha_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
\alpha_2 & 0 & 1 & 0 & 0 \cdots \\
\hline
\alpha_3 & a_3^1 & a_3^2 & & \\
 & & & * & \cdots \\
\alpha_4 & a_4^1 & a_4^2 & & \\
\hline
 & \cdots & & &
\end{array}$$

(i) $0 = \alpha_1 \tilde{\alpha}_\lambda = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a_\lambda^1 & a_\lambda^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ a_\lambda^3 & a_\lambda^4 \end{vmatrix} + \cdots$

$\therefore\ a_\lambda^2 = 0$

(ii) $0 = \alpha_2 \tilde{\alpha}_\lambda = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ a_\lambda^1 & a_\lambda^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ a_\lambda^3 & a_\lambda^4 \end{vmatrix} + \cdots$

$\therefore\ a_\lambda^1 = 1$. 従って左の形が得られる．

$$\begin{array}{c|cc|cc}
 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \cdots \\
\hline
\alpha_1 & & & & \\
 & & 1 & & 0 \cdots \\
\alpha_2 & & & & \\
\hline
\alpha_3 & & & & \\
 & & 0 & & * \cdots \\
\alpha_4 & & & & \\
\hline
\vdots & \cdots & & \cdots &
\end{array}$$

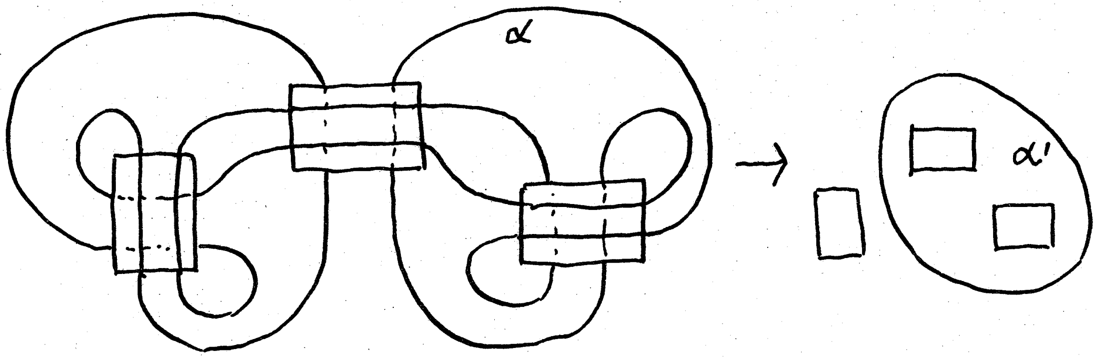
以下同様にして 1 が得られる．□

*) 便宜上 $B_{\varepsilon 0}$（くぐる）を用いたが，定理7によって"ねじる"と"わたる"に置き換えられる．

<u>定理9.</u> homeo は homological には"わたる""ねじる"(または"くぐる"，"ねじる")の積として表わすことができる．□

<u>問2</u> この系は homotopical にも成立するだろうか．

<u>問3</u> 単一閉曲線 α が ~ 0 のとき, M^2 上の基本変形 くぐる, ねじる, わたる で α を, handle を"わたったり, くぐったりしない" α' に変形できないか?



(□ は handle を上から見た図) (この図は演習問題)

今までのことから M^2 上の conjugate pair になる閉曲線について種々のことが分るが, その一つに次の定理がある

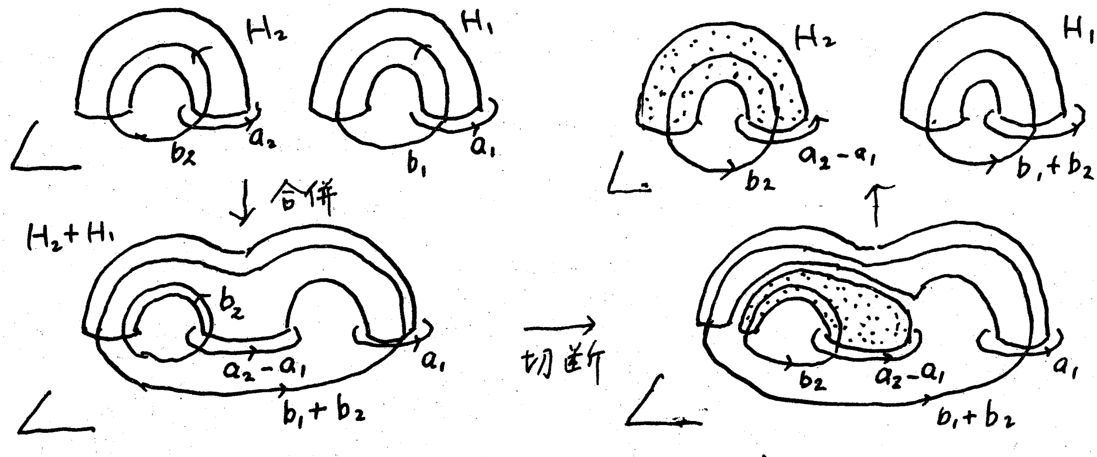
<u>定理</u> (金子哲夫氏) $\alpha = a_1e_1+\cdots+a_{2n}e_{2n}$ と $\sim$ で M^2 を2分しない単一曲線が存在する条件は $(a_1, a_2, \ldots, a_{2n}) = 1$ である.

§6

handle を分離する操作

"わたる" homeo は特に重要な意味をもつ. それは M^2 から handle をきりとる操作が homological にこれと同じだからである.

次頁の図で, 柄 H_1 を動かして H_2 と合併させ, これを別の切口によって二つの柄に切断すると, 基本 cycle (a_2, b_1)



(handle の合併と切断)

(a_2, b_2) は (a_1, b_1+b_2), (a_2-a_1, b_2) と ～ である cycle に移る。この変形は"わたる"と同じである。すると"合併"と"切断"の繰返は"わたる" matrix の積で表わせることになるが、今度はこの matrix を次のように分けて書くと分り易い。

新 \ 新	a_1	a_2	a_i	a_j	$\cdots$	a_n	b_1	b_2	b_i	b_j	$\cdots$	b_n
新 \ 旧	e_1	e_3	e_{2i-1}	e_{2j-1}	$\cdots$	e_{2n-1}	e_2	e_4	e_{2i}	e_{2j}	$\cdots$	e_{2n}
$\alpha_1=\alpha_1$	1											
$\alpha_2=\alpha_3$		1										
$\alpha_i=\alpha_{2i-1}$			1	$(-\varepsilon)$								
$\alpha_j=\alpha_{2j-1}$			$-\varepsilon$	1								
$\vdots$												
$\alpha_n=\alpha_{2n-1}$						1						
$\beta_1=\alpha_2$							1					
$\beta_2=\alpha_4$								1				
$\beta_i=\alpha_{2i}$									1	ε		
$\beta_j=\alpha_{2j}$									(ε)	1		
$\vdots$											$\ddots$	
$\beta_n=\alpha_{2n}$												1

(空欄は 0)

$$
\begin{array}{ll|ccccccc}
\text{新} \rightarrow & & a_1 & a_2 & \cdots\, a_n & b_1 & b_2 & \cdots\, b_n \\
\downarrow & \text{旧} & e_1 & e_3 & \cdots\, e_{2n-1} & e_2 & e_4 & \cdots\, e_{2n} \\
\hline
\alpha_1 & \alpha_1 & & & & & & \\
\alpha_2 & \alpha_3 & & a_i^j & & & 0 & \\
\vdots & & & & & & & \\
\alpha_n & \alpha_{2n-1} & & & & & & \\
\beta_1 & \alpha_2 & & & & & & \\
\beta_2 & \alpha_4 & & 0 & & & b_i^j & \\
\vdots & \vdots & & & & & & \\
\beta_n & \alpha_{2n} & & & & & &
\end{array}
$$

従ってこの積は左のようになり, (5) は簡単に

$$(a_i^j)(b_j^k) = 1 \quad (\text{単位行列})$$

に帰着される。これからまた定理4によってこの (a_i^j) は $|a_i^j| = \pm 1$ である任意のすべてが取られることになる。

さて先に行った"合併""切断"で得られた柄の一つを (α, β) で表わすと, α, β には夫々 M^2 の外部と内部に disk が張れ, $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$ と homotop な単一 cycle γ で M^2 を切る球面 S^2 によって標準的な handle が M^2 から分離できる。"合併"と"切断"の繰返でこのような様々の柄の分離ができる。ところが上の matrix の議論は逆に, 標準 handle の分離は homological にはすべてこの操作で得られることを教えている。よって

<u>定理10.</u> (α_i, β_i) $i=1,\cdots,n$, $\alpha_i = \sum a_i^\rho a_\rho$, $\beta_i = \sum b_i^\rho b_\rho$ が M^2 上の標準的な handle を表わす conjugate pair の full system になる必要十分条件は $|a_i^j| = \pm 1$ である。特に $|a_i^j| = \pm 1$ となる (a_i^j) を与えれば, (b_i^j) は $(a_i^j)(b_i^j) = 1$ (単位行列) の関係から決定される。 以上.