数理解析研究所講究録
219巻 1974年 60-69

BORING 3-MANIFOLDS

相模工大　津久井　康之

§ General Situation.

3-manifold の研究に Heegaard Splitting を考えることは、一般的ではあるが、どうしようもない困難にぶつかるのもまた一般的らしい。それで、それよりはすこしはなんとかなるだろうと思われる compact connected orientable 3-manifold with nonempty connected boundary についてながめてみよう。(以下では特にことわらない限り、3-manifold は全て connected かつ orientable とする。) ここではこのような立場からの一端を示し、研究の第一歩とする。

V^3 を compact 3-manifold with connected boundary ∂V of genus $g \geq 0$ とする。$\{J_i\}_{i=1,2,\cdots,k}$ を disjoint proper arcs in V, $N(J_i;V)$ で J_i の V での regular neighborhood を表わす。

Definition. $H(V) \equiv cl(V - \bigcup_{i=1}^{k} N(J_i;V))$

とすると、$H(V)$ は J_i を適当な数だけ適当に選ぶと solid-torus (handle body) となり genus は $g+k$. このような数 k の最小数を $\mu(V)$ で示す。 また $\pi_1(H(V))$ が free group となるような数 k の最小数を $m(V)$ と定義する。

Proposition. (1) $m(V) \leqq \mu(V)$

(2) V が S^3 に embedable ならば $m(V) = \mu(V)$.

つまり、$\mu(V)$ と $m(V)$ との差は Poincare Conjecture をも含む大問題だから、当然ここでは避けて通る．

Remark 1. $N(J_i;V) \cap \partial V = \partial N(J_i;V) \cap \partial V$ は丁度２枚の 2-disks $C_i^2, C_i^{2\prime}$ であり, $C_i^1 = \partial C_i^2 \simeq \partial C_i^{2\prime}$ on $\partial H(V)$ ($\simeq$ は homotopic, $\sim$ は homologoe) である。そこで L. Roeling [R] は ($H(V);\, C_1^1, C_2^1, \cdots, C_k^1$) を V^3 の Heegaard Splitting と呼んでいる。(彼は $g+k$ の最小数. すなわち $g+\mu(V)$ を V の Heegaard-genus と呼ぶ.)

2. J. Downing [D] は compact 3-manifold V ($\partial V \neq \phi$ may not connected) に対して、$V = H_1 \underset{\partial}{\cup} H_2$, $H_1 . H_2$ は solid tori of same genus, と表わせることを示している。closed 3-manifold との関係を考える場合にも、$\partial V \neq \phi$ なる V^3 の Heegaard Splitting としては Roeling 流のほうが自然である。

closed 3-manifold M^3 の Heegaard-Splitting の genus の (geometric でない) 数としての最小数を $\bar{\mu}(M)$ と記すとする。W. Haken の重要な定理 [H1, p84] の corollary として、

Proposition. $\bar{\mu}(M_1 \# M_2) = \bar{\mu}(M_1) + \bar{\mu}(M_2)$ (#: connected sum).
がある。boundary をもつ compact manifold に対する disk sum (♮) についても同様の問題が考えられるが closed case に ruduce することは簡単にはいかないようである．すなわち；

PROBLEM 1. $V^3 = V_1 \natural V_2$ のとき，

$$? \quad \begin{array}{ll} ① & \mu(V) = \mu(V_1) + \mu(V_2) \\ ② & m(V) = m(V_1) + m(V_2) . \end{array} \qquad (\leqq \text{ は trivial})$$

group G の presentation $(x_1, \cdots, x_n ; r_1, \cdots, r_m)$ を考えてその generators $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の最小数を G の rank と呼び $r(G)$ と書く。$H(V)$ が solid torus (又は $\pi_1(H(V))$ が free group) ならば V は $H(V)$ に各 c_i に沿って 2-handle を attach して得られるのだから，c_i の $\partial H(V)$ での free homotopy class (スナワチ、$\pi_1(H(V))$ の conjugacy class としても良い) を c_i' で表わすと，

$$\pi_1(V) = (x_1, x_2, \cdots, x_{g+m} ; c_1', \cdots, c_m') \quad , m = m(V) ,$$

なる $\pi_1(V)$ の presentation を得るから，$r(\pi_1(V)) \leqq m(V) + g$.

PROBLEM 2. V^3 が S^3 に embedable ならば，

$$? \quad r(\pi_1(V)) = g + m(V) .$$

Haken [H2] は F.Waldhausen の propose として，

Conjecture. $\bar{\mu}(M) = r(\pi_1(M))$ $\quad M^3$: closed.

$$\mu(V) + g = r(\pi_1(V)) \qquad \partial V^3 \neq \phi,\ V^3\text{: compact}.$$

という無責任極まりない予想をあげている。

problem 2. が *yes* である V^3 (embedable into S^3) に対しては群論の結果を用いると *problem* 1 の ①,② とも *yes* となることはあきらかである。

boundary の *genus* が g である V^3 に *genus* g の *solid torus* H_g を *boundaries* の *homeo.* で張り合せると *closed* 3-*manifold* を得るが、一般には $\bar{\mu}(V^3 \underset{\varphi}{\cup} H_g) \leqq g + \mu(V^3)$ である。

PROBLEM 3. 任意の *compact* 3-*manifold* V^3 *with connected* ∂V^3 *of genu* $g \geqq 0$ に対して $\bar{\mu}(V^3 \underset{\varphi}{\cup} H_g) = g + \mu(V^3)$ となるような *homeo.* $: \partial V^3 \to \partial H_g$ は存在するか? (この場合も一般的にはむつかしいので、V^3: *irreducible* とか S^3 に embedable, 又 $g \geq 1$ という条件をつけて考えるべきだろう.)

problem 3. が *yes* であるような V^3 については *Problem* 1-① を *closed case* に *reduce* できるかもしれない。

§ Application and relation to knot.

一般的な事とか問題作りばかりではしょうがないから、すこし具体的なものを材料にしよう。 K を S^3 の中の knot (simple closed tame curve) とし、$V(K) = S^3 - \mathring{N}(K; S^3)$ を closed complement of knot K と呼ぶことにする。ある種の K に対して $\mu(K)$ は,

Theorem. *knot* K *in* S^3 に対して、次のような *map* f,

$f : S^1 \times I \to S^3$ *map.* *such that* $f | S^1 \times (0,1]$: *embedding*,

$f(S^1\times\{1\})=K$ and $f(S^1\times\{0\})=K_0$: some knot があれば、

$\mu(V(K)) \leqq \mu(V(K_0))+1$ である。

(Proof) 実際に $V(K)$ に boring を1回してやって、それが $V(K_0)\natural S^1\times D^2$ になることを示せばよい。せっかく全てが S^3 の中にあるのだから、S^3 の中の nonsingular 2-disk D で $\mathring{D}\cap K_0=\phi$, $D\cap K_0=$ one point なるものがあって、一方 K 上に2端点をもつ arc Γ を選び(これに沿って $V(K)$ を boring するとみる) $N(K\cup\Gamma;S^3)$ と $N(K_0\cup\partial D;S^3)$ とが ambient isotopic であることを示せば十分である。$S^1\ni p_0$: one point, $f(p_0\times I)=A$ arc.

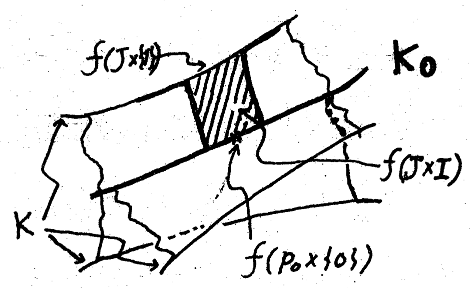
$V(K)\approx V(K)\cup N(A;S^3)$ ($\because N(A;S^3)$: 3-ball). ($\approx$: isotopic)

$\overline{K_0-N(A;S^3)}$: arc , $H(V(K))\equiv\overline{S^3-N(K\cup K_0\cup A;S^3)}$.

J を S^1 の sub arc で p_0 を内部に含むものとすると、

$N(K\cup A\cup K_0;S^3)\approx N(K\cup K_0\cup f(J\times I);S^3)\approx N(K_0\cup(K-f(\mathring{J}\times\{1\}))\cup f(J\times I);S^3)$

$\approx N(K_0\cup(K-f(\mathring{J}\times\{1\}))\cup f(\partial J\times I);S^3)$



最後には $J'\subset S^1-J$ で、

$\approx N(K_0\cup\partial(f(J'\times I));S^3)$ となり

証明を終る. 必要ならば $f|(S^1\times\{0\})$ でその degree に合せて local homeo. にしておけば見やすいだろう。

f が embedding なら $\mu(V(K))=\mu(V(K_0))$ でつまらないが、K_0 が trivial knot のとき、nontrivial torus knot に対して、

Corollary. K が torus knot なら $\mu(V(K))=1$.

この $\mu(V(K))$ を knot の invariant とみることはもちろん出来るが、unknotting number より小さい、というくらいで knot の分類にはほとんど役に立たない。なにしろ problem 2. という見方もあるくらいなのだから。

Poincare conjecture の反例候補を作ろうと、S^3 から knot K の regular neighborhood の interiour を取り去って異なる張り合わせで closed 3-manifold を作る Bing の方法,(いわゆる property P)について考える[B-M]。出来上った 3-manifold $V(K)\underset{g}{\cup}H_1$ の Heegaard genus $\bar{\mu}(V(K)\underset{g}{\cup}H_1)$ は $\mu(V(K))+1$ 以下だから、普通そんなに複雑なもの(Heegaard genus から見た限り)はできそうにない。特にこのようにして作った closed 3-manifold の Heegaard splitting $(H_{\mu+1}; c_1, c_2, \cdots, c_{\mu+1})$ (c_i: simple loop on $\partial H_{\mu+1}$) については(Simply connected であろうとなかろうと), S^3 の中の $V(K)$ に boring することですぐわかるが, embedding $f: H_{1+\mu} \to S^3$ が存在して $f(c_i) \simeq 1$ in $S^3 - f(\mathring{H}_{1+\mu})$, $i = 1, 2, \cdots, \mu$, という特徴がある。なお homology 3-sphere の Heegaard Splitting の S^3 への embedding については D.Neuman [N] がある。もっとも Splitting の genus はだいぶ大きくなるが。

話をすこしもどして、2つの knot K_1, K_2 とその product についても Problem 1 に似た次のような問題がある.

PROBLEM 4. $\mu(V(K_1 \# K_2)) = \mu(V(K_1)) + \mu(V(K_2))$?

もちろん knot に限らず、link から作られる closed 3-manifold に対しても元の link の μ を求めることから $\bar{\mu}$ の上限を知ることはできる。次に trefoil knot から作られる homology 3-sphere の Heegaard Splitting を例としてあげておこう。これは Dehn の作った manifold で、これの spine — fake spin — は H. Ikeda 〔I〕にある。trefoil knot K に対して $\mu(V(K))=1$ だから、全て Heegaard genus は 2 になる。

Example. K : trefoil knot.

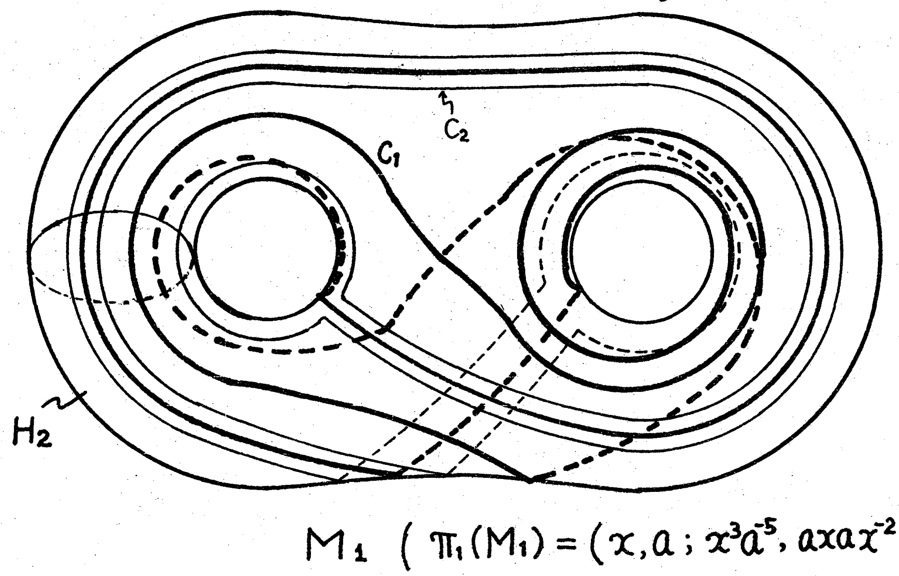
$m, \ell \subset \partial V(K)$; $N(K;S^3)$ の meridean と londitude.

$m', \ell' \subset \partial H_1$; solid torus of genus 1 の 〃 〃 .

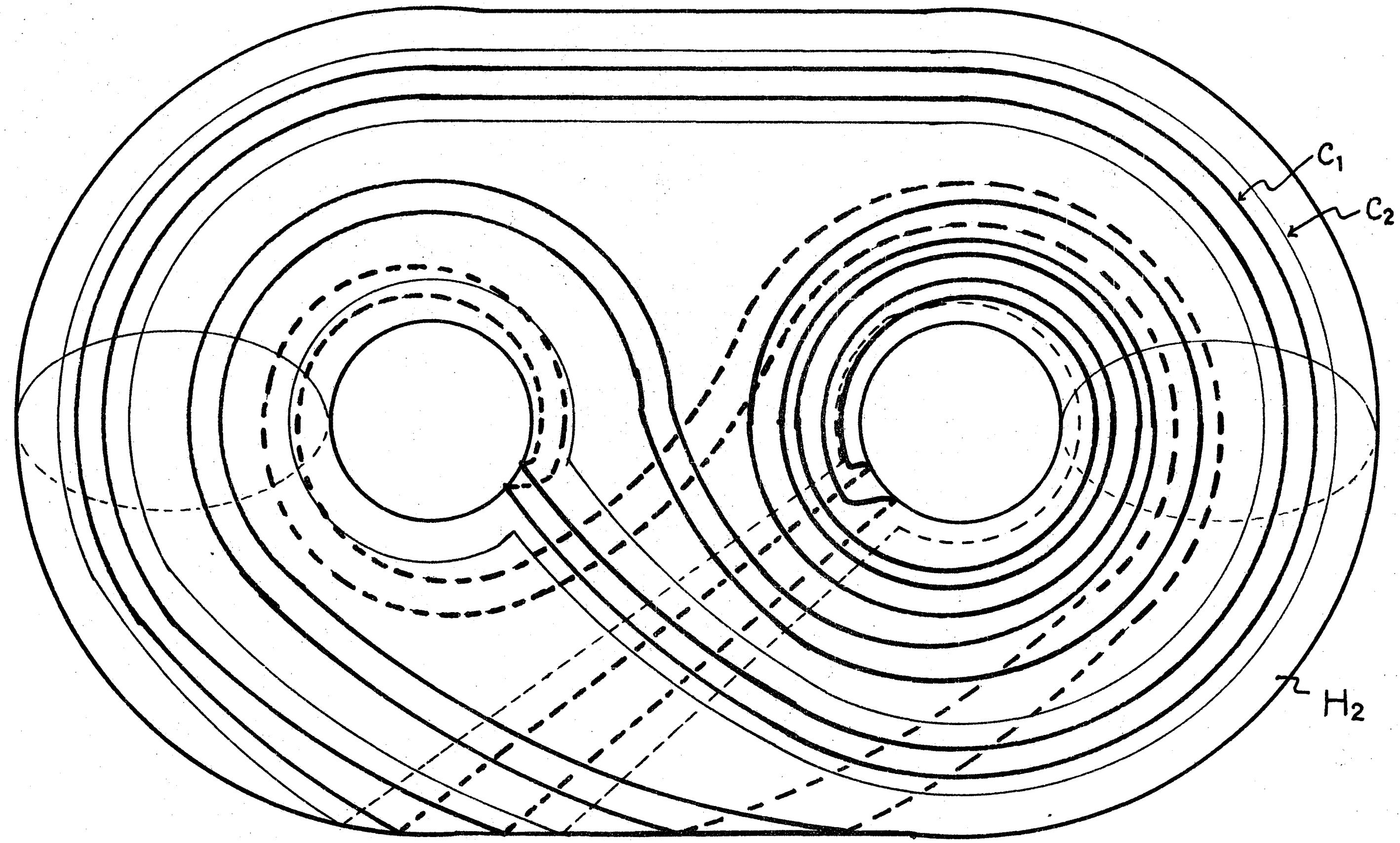
$h_k : \partial H_1 \to \partial V(K)$ homeo. by $h_k(m') = \ell m^3$, $h_k(\ell') = m(\ell m^3)^{-k}$.

$M_k = V(K) \underset{h_k}{\cup} H_1$: homology 3-sphere $k \geq 1$ integer.

これら M_k については $M_i \not\cong M_j$ $(i \neq j)$ が group から分っている。



M_1 $\left(\pi_1(M_1) = (x, a\,;\, x^3a^{-5},\, axax^{-2})\right)$

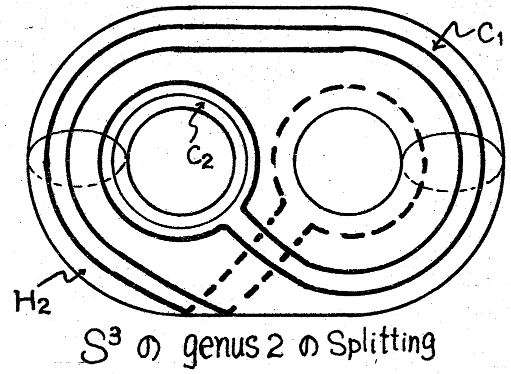


M_3. $\left(\pi_1(M_3) = (x, a\,;\ x^6 a^{-11},\ axax^{-2}) \right)$

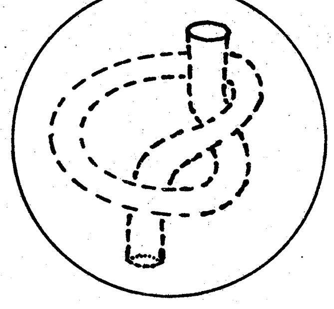
§ Motivation

例えば simply connected closed 3-manifod M の Heegaard-Splitting $(H_n ; c_1, \cdots, c_n)$ について $H\langle c_i \rangle$で H_n に c_i に沿って 2-handle を attach して得られる manifold を表わす。$H\langle c_{i_1} \rangle, H\langle c_{i_1}, c_{i_2} \rangle, \cdots$ が全て solid torus ならば M は明らかに S^3 である。というわけで step-wise に $H\langle c \rangle$ が solid-torus になるための c の条件（例えば c が $\pi_1(H)$ の primitive element を represent するとか）を探したりする。ところが、次の簡単な図で示すように、S^3 の Heegaard Splitting でさえそのままでは、こんな調子の良い性質は持っていない。

だから step wise (inductive) にながめるのではなく、全体をいっぺんに見なくてはならない。しかしこのような状態ではながめようもないので、逆に穴を掘っていった跡をふり返ってそれらの性質のいくらかをみつけようというのが動機である。現在はまだそれらしきものも何もない。これからというところである。



S^3 の genus 2 の Splitting



$H_2\langle C_1 \rangle$

REFERENCES

[B-M] R.Bing & J.Martin: Cubes with knotted holes, Trans. A.M.S. 155 (1971) 217-231.

[D] J.Downing: Decomposing compact 3-manifolds into homeomorphic handlebodies, Proc. A.M.S. 24(1970) 241-244.

[H1] W.Haken: Some results on surfaces in 3-manifolds, Studies in modern topology, 39-98, Math. Assoc. Amer. (1968).

[H2] ——— : Various aspects of the three-dimensional Poincaré problem, Topology of Manifolds, (Proc. Georgia 1969) Markham, Chicago (1970), 140-152.

[I] H.Ikeda: Non-contractible acyclic normal spines, Osaka J. Math. 10(1973) 511-520.

[N] D.Neumann: Heegaard Splittings of homology 3-spheres, Trans. A.M.S. 180(1973) 485-495.

[R] L.Roeling: The genus of an orientable 3-manifold with connected boundary, Illinois J. Math. 17(1973) 558-562.