

穴を開けた球面のアイトピー群について

東教大理 金戸武司

§1 序

多様体 M の自己同相群 $H(M)$ のアイトピー類のなす群 $I(M)$ について *annulus theorem* は基本的な役割をなす。Kirby [5] は 4次元を除き成り立つことを示した。このことから, $I(S^n) \cong \mathbb{Z}_2 (n \neq 4)$ になる。又 Gluck [2] は, $I(S^2 \times S^1) \cong \mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z}_2$ を示した。この報告では, n -次元球面 S^n から k 個の n -球を除いた多様体 S_k^n について, $n=2$ から $n \leq 3$, $n=3$, $n \geq 6$ ならば, $I(S_k^n) \cong P_k \times \mathbb{Z}_2$ (P_k は k 次対称群) となることを示す。

§2. 定義と準備.

\mathbb{R}^n を n -次元ユークリッド空間, $B^n := \{(x_i) \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 1\}$ を標準 n -球, $S^{n-1} := \{(x_i) \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1\}$ を標準 $(n-1)$ -球面とする。それぞれに同相なものを, 単に, n -球, $(n-1)$ -球面という。

定義: $S^n \supset \hat{S}^{n-1}$ ($(n-1)$ -球面が任意の $x \in \hat{S}^{n-1}$ に対し,

S^n での近傍 U が存在し, $(U, U \cap \hat{S}^{n-1})$ と (R^n, R^{n-1}) が対同相をなすとき, 局所平坦という。 $S^n \supset D^n$: n -球がその境界で局所平坦のとき, 局所平坦という。

記号: $S^n \supset D_i^n$ ($i=1, 2, \dots, k$) を局所平坦な相交わらない n -球とする。 $S^n - \bigcup_{i=1}^k D_i^n$ の閉包を S_k^n で表わす。

注1: $n \geq 1$ ($n \neq 4$) のとき, *annulus theorem* より S_k^n は, D_i^n の取り方に依らず同相, 以下, S_k^n として, S^n の赤道に関する *reflection* が S_k^n の *reflection* を引き起こすように, $D_i^n := \{ (x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) \mid \sum_{j=1}^{n+1} x_j^2 = 1, (x_1 - \cos \frac{2\pi i}{k})^2 + (x_2 - \sin \frac{2\pi i}{k})^2 + \sum_{j=3}^{n+1} x_j^2 \leq (\frac{\sin \frac{\pi}{k+1}}{2})^2 \}$ によって得られるものとする。

S_k^n 上のすべての自己同相群 $H(S_k^n)$ は, コンパクト開位相に関して, 合成を演算とし位相群をなす。 $H_0(S_k^n) := \{ h \in H(S_k^n) \mid h \sim 1 \}$ (1 は恒等写像, 「 \sim 」はアイトピック) は, $H(S_k^n)$ の開閉正規部分群をなす。以下, アイトピク群 $I_k^n := H(S_k^n) / H_0(S_k^n)$ について考察する。

記号: ${}^+I_k^n := \{ (h) \mid h \in H(S_k^n), h: \text{向きを保つ} \}$ ((h) は h を含むアイトピク類), ${}^+_0I_k^n := \{ (h) \in {}^+I_k^n \mid h(\hat{S}_i^{n-1}) = \hat{S}_i^{n-1} \}$ ($i=1, 2, \dots, k$), 但し $\partial S_k^n = \bigcup_{i=1}^k \hat{S}_i^{n-1}$ 。

$\iota: {}^+I_k^n \rightarrow I_k^n$ を包含写像, $\pi: I_k^n \rightarrow I_k^n / {}^+I_k^n$ を自然な準同型とする。

命題1. 短完全系列 $0 \rightarrow {}^+I_k^n \xrightarrow{\iota} I_k^n \xrightarrow{\pi} I_k^n / {}^+I_k^n \rightarrow 0$ は分解型で, $I_k^n \simeq {}^+I_k^n \cdot \Sigma_2$ (\cdot は半直積) となる。

証明. $I_k^n / {}^+I_k^n$ の生成元 ${}^+I_k^n$ に, $(\sigma) \in I_k^n$ ($=$ $=$ $=$ $\tau \in H(S_k^n)$) は, $\tau(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) = (x_1, x_2, \dots, x_n, -x_{n+1})$ を対応させる準同型 $\psi: I_k^n / {}^+I_k^n \rightarrow I_k^n$ は, $\pi \circ \psi = 1$.

注2. (σ) の生成する位数2の部分群 $\langle (\sigma) \rangle$ が I_k^n で正規なら, I_k^n は直積に分解。

$\iota: {}^+I_k^n \rightarrow I_k^n$ を包含写像, $\pi': I_k^n \rightarrow I_k^n / {}^+I_k^n$ を自然な準同型とする。

命題2. 短完全系列 $0 \rightarrow {}^+I_k^n \xrightarrow{\iota} I_k^n \xrightarrow{\pi'} I_k^n / {}^+I_k^n \rightarrow 0$ に於いて, $I_k^n / {}^+I_k^n$ は k 次対称群 P_k と同型。

証明. $H(S_k^n) \ni \pi_{ij}$ で向きを保ち, $\partial S_k^n \supset \hat{S}_i^{n-1}, \hat{S}_j^{n-1}, \hat{S}_j^{n-1}$ ($l+i, l+j, k \geq l \geq 1$) に対し, $\pi_{ij}(\hat{S}_i^{n-1}) = \hat{S}_j^{n-1}$, $\pi_{ij}(\hat{S}_j^{n-1}) = \hat{S}_i^{n-1}$, $\pi_{ij}(\hat{S}_l^{n-1}) = \hat{S}_l^{n-1}$ なるものが次のように構成できる。 n -球 $D^n \subset S^n$ 上, $\hat{S}_i^{n-1} \cup \hat{S}_j^{n-1}$ を内部に含み, 他と交わりなくものをとり, D^n 上の同相写像 $\hat{\pi}_{ij}$ で $\hat{\pi}_{ij}|_{\partial D^n} = 1$, $\hat{\pi}_{ij}(\hat{S}_i^{n-1}) = \hat{S}_j^{n-1}$, $\hat{\pi}_{ij}(\hat{S}_j^{n-1}) = \hat{S}_i^{n-1}$ となるものを回転により作り, π_{ij} を $D^n \cap S_k^n$ 上で $\hat{\pi}_{ij}$, 他で1とすればよい。これにより, $f: P_k \rightarrow I_k^n / {}^+I_k^n$ を $f((i, j)) := [(\pi_{ij})]$ ($=$ $=$ $=$ $[(\pi_{ij})]$ は (π_{ij}) を含む $I_k^n / {}^+I_k^n$ の類), $f((i, j)(i', j')) := [(\pi_{ij})(\pi_{i'j'})]$ で定義すれば同型となる。

次の定理が基本的役割をなす。

定理 $n=2$ か $k \leq 3$, $n=3$, $n \geq 6$ のとき, ${}^+I_k^n = 0$ 。

系 $n=2$ か $k \leq 3$, $n=3$, $n \geq 6$ のとき $I_k^n \simeq P_k \times \mathbb{Z}_2$ (直積)

証明. $I_k^n \ni (h)$ に対し, $(h)^{-1}(\tau)(h)(\tau)^{-1} = (h^{-1}\tau h\tau^{-1}) \in {}^+I_k^n$
 , 従って定理より, 右辺 = (1) となるから, $(h)^{-1}(\tau)(h) = (\tau)$ 。

故に $\langle (\tau) \rangle$ は I_k^n の正規部分群。命題 1 の注 1 より, $I_k^n \simeq {}^+I_k^n \times \mathbb{Z}_2$
 (直積)。命題 2 より ${}^+I_k^n \simeq {}^+I_k^n / {}^+I_k^n \simeq P_k$ 故に $I_k^n \simeq P_k \times \mathbb{Z}_2$ 。

§3. 定理の証明

次の結果が知られている。(15)

命題 3 (annulus theorem)

$f, g: S^{n-1} \rightarrow R^n$ が向きを保つ局所平坦な埋蔵で, $f(S^{n-1})$
 が $g(S^{n-1})$ の囲む R^n の有界な領域に含まれるとき, $n \neq 4$ なら
 は, 埋蔵 $F: S^{n-1} \times [0, 1] \rightarrow R^n$ で, $F(x, 0) = f(x)$, $F(x, 1) = g(x)$
 ($\forall x \in S^{n-1}$) を満たすものが存在する。

命題 4 (アイトピック定理)

$f: S^n \rightarrow S^n$ を向きを保つ同相写像とすると $n \neq 4$ のとき,
 $f \sim 1$ 。(「 \sim 」は アイトピック)

証明。命題 3 より 次のように導かれる。 $S^n \ni a$ (固定点)
 に対し, $\{a, f(a)\} \subset \overset{\circ}{D}^n$ なる n -球が存在する。 D^n の全位
 構造により, $f \sim f_1$ で $f_1(a) = a$ とできる。 a の ε -球近傍
 B_ε^n が十分小さくとれば, $f_1(B_\varepsilon^n) \subset B_\varepsilon^n$ となる a の δ -球近傍が

存在し, $f_1|_{\partial B_{\varepsilon}^n}$ と $i: \partial B_{\varepsilon}^n \rightarrow S^n$ (包含写像) に命題3を用いて $F(S^{n-1} \times I \times I)$ に沿って $f_1(\partial B_{\varepsilon}^n)$ を動かすことにより $f_1 \sim f_2$ で $f_2|_{\partial B_{\varepsilon}^n} = 1$ とできる。Alexanderアイトポードにより, $f_2 \sim 1$ となる。

注3. 逆も成り立つ。(□)

命題5 (アイトポード拡張定理)

多様体 M 上の同相写像 $f: M \rightarrow M$ の ∂M 上のアイトポード $f_x|_{\partial M}$ は M 上のアイトポード f_x に拡張できる。

定理の証明。

${}^+I_k^n = 0$ を示すには ${}^+I_k^n \ni (f)$ が $(f) = (1)$ となるから, $H(S_k^n)$ が向きを保ち, $f(\hat{S}_i^{n-1}) = \hat{S}_i^{n-1}$ ($i=1, \dots, k$) ならば, $f \sim 1$ を示せばよい。命題4, 5により $f|_{\partial S_k^n} = 1$ としてよい。以下3つの場合に分けて $f \sim 1$ を示す。

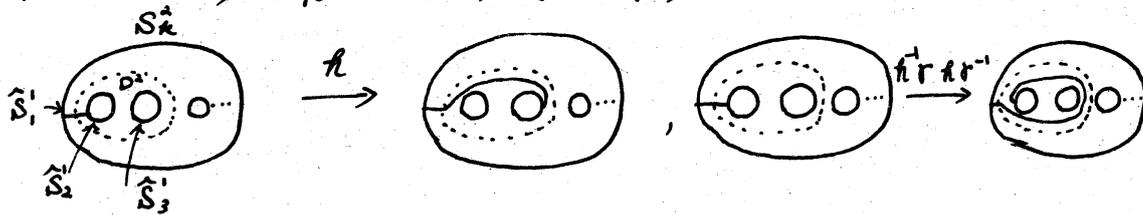
I] $n=2$ か $k \leq 3$ の場合。

- i) $k=1$ のとき, Alexanderアイトポードにより $f \sim 1$ 。
- ii) $k=2$ のとき, \hat{S}_1^1 を回転させれば, [3]の9頁(7.2)で成立。
- iii) $k=3$ のとき, ii)での[3]の方法を, 変形の途中で \hat{S}_3^1 にひっかからぬように注意して適用すればよい。

注4. $k \geq 4$ では, $\perp(I_k^n / {}^+I_k^n) = \langle (f) \rangle$ が I_k^n で正規とならず, $I_k^n \not\cong {}^+I_k^n \times \mathbb{Z}_2$ (直積)。次はその例である。

$\partial S_k^n \cap \hat{S}_2^1, \hat{S}_3^1$ を含み, 他と交わらぬ2-球 $D^2 \subset S^2$ で,

$\gamma(D^2) = D^2$ とするものをとり, $h|_{D^2}: D^2 \rightarrow D^2$ を D^2 の内部を 180° 回転させて得られる同相写像で, $h|_{D^2}|_{\partial D^2} = 1$,
 $h|_{D^2}(\hat{S}'_2) = \hat{S}'_3$, $h|_{D^2}(\hat{S}'_3) = \hat{S}'_2$ とするものとする。
 $h|_{S^2_k - D^2} = 1$ により拡張して $h: S^2_k \rightarrow S^2_k$ をうす。
 $h^{-1} \circ h \circ \gamma^{-1}: (S^2_k, \partial S^2_k) \rightarrow (S^2_k, \partial S^2_k)$ は 1 と対して
 ホモトピックであるから, $(h^{-1} \circ h \circ \gamma^{-1})(\gamma^{-1})^{-1} \neq (1)$ 。(F図参照)



II] $n=3$ の場合.

i) $k=1$ のとき, I] の場合と同様。

ii) $k \geq 2$ のとき. 自然数 m を $k > m \geq 1$ とする. m につ

いての帰納法を用いる。

\hat{S}'_i と \hat{S}'_{i+1} を結ぶ線分を $l_{i,i+1}$ とし, その自明の管状近傍を

$$T_i: B^2 \times [0,1] \rightarrow S^2_k \quad (T_i(0 \times [0,1]) = l_{i,i+1}, T_i(B^2 \times 0) \subset \hat{S}'_i, T_i(B^2 \times 1) \subset \hat{S}'_{i+1})$$

とする. $h \sim h_{m-1}$ まで変形

され, $h_{m-1}|_{\partial S^2_k \cup \bigcup_{j=1}^{m-1} T_j(B^2 \times [0,1])} = 1$ であるとする。

[3]と同様の手法により, $\partial S^2_k \cup \bigcup_{j=1}^{m-1} T_j(B^2 \times [0,1])$ を止めたま

ま, $h_{m-1} \sim h'$ で $h'(T_m(B^2 \times [0,1])) = T_m(B^2 \times [0,1])$ と

できる. $h'|_{T_m(\partial B^2 \times [0,1])}: T_m(\partial B^2 \times [0,1]) \rightarrow T_m(\partial B^2 \times [0,1])$

に 前 II] の $k=2$ を適用 (必要なら, $T_m(\partial B^2 \times [0,1])$)

(\hat{S}_m^2 を回転させる。) し, 命題5を用いて $\mathbb{T}_m(\partial B^2 \times 0) \subset \hat{S}_{m-1}^2$ を止めて, $h' \sim h''$ で $h''|_{\partial S_k^2 \cup \bigcup_{j=1}^{k-1} \mathbb{T}_j(B^2 \times [0,1])} = 1$ とできる。 $h''|_{\mathbb{T}_m(B^2 \times [0,1])}$ に Alexander アイントピ-を用いて, $h'' \sim h_m$ をうる。 $h_{k-1}|_{\partial S_k^2 \cup \bigcup_{j=1}^{k-1} \mathbb{T}_j(B^2 \times [0,1])} = 1$ だが, h_{k-1} は 3-球 $S_k^3 - [\partial S_k^2 \cup \bigcup_{j=1}^{k-1} \mathbb{T}_j(B^2 \times [0,1])]$ の境界上で, 1. Alexander アイントピ-により $h_{k-1} \sim 1$.

Ⅲ] $n \geq 6$ の場合.

次の特殊な場合について考える。

補題1 $n \geq 2$ のとき, $h: S_2^n \rightarrow S_2^n$ が向きを保ち, $h(\hat{S}_i^{n-1}) = \hat{S}_i^{n-1}$ ($i=1,2$) を満たす PL 同相写像ならば, $h \underset{PL}{\sim} 1$. ($\underset{PL}{\sim}$: PL アイントピ-)

証明. n についての帰納法を用いる。

$n=2$ のとき, [3] の 9h. (7.2) は, PL カテゴリーでも成り立つからよい。 $n-1$ まで成り立つとする。 PL カテゴリーで, 命題3, 従って命題4が $n \geq 1$ で, 及び命題5が成り立つから, $h \underset{PL}{\sim} h'$ で $h'|_{\partial S_2^n} = 1$ とできる。 h' は PL だが $h'(l_{1,2})$ は \hat{S}_1^{n-1} と \hat{S}_2^{n-1} を結ぶ折れ線。よって, $h' \underset{PL}{\sim} h''$ で, $h''|_{\partial S_2^n \cup l_{1,2}} = 1$ とできる。 $l_{1,2}$ の自明の管状近傍 $\mathbb{T}_1: B^{n-1} \times [0,1] \rightarrow S_2^n$ を PL 写像でとると, $\mathbb{T}_1(B^{n-1} \times [0,1])$, $h''(\mathbb{T}_1(B^{n-1} \times [0,1]))$ は, 共に $l_{1,2}$ の正則近傍でしかも, $\mathbb{T}_1(B^{n-1} \times [0,1]) \cap \partial S_2^n = h''(\mathbb{T}_1(B^{n-1} \times [0,1])) \cap \partial S_2^n$ は,

$l_{1,2} \cap \partial S_2^2 = \mathbb{T}_1(0 \times \{0,1\})$ の ∂S_2^2 に対する正則近傍。

よって相対正則近傍の一意性により $f'' \sim_{PL} f'''$ で $f''|_{\partial S_2^2} = 1$

かつ $f'''(\mathbb{T}_1(B^{n-1} \times [0,1])) = \mathbb{T}_1(B^{n-1} \times [0,1])$ とできる。

$f'''|_{\mathbb{T}_1(\partial B^{n-1} \times [0,1])}$ に仮定を適用し、命題5と Alexander アイソトピーを用いて、 $f'' \sim_{PL} 1$ 。

$n \geq 6$ の一般の場合、次の Kirby [6] Th. 17 を用いる。

命題6. $g \geq 5$ のとき、 g 次元位相多様体 Q^g のコンパクト部分多様体 Q_0 が PL 構造をもち、かつ Q_0 の拡張が存在するならば、その拡張の Q_0 を止めたアイソトピー類は、 $H^3(Q, Q_0, \mathbb{Z}_2)$ と 1対1 に対応する。

定理の証明. $f: S_k^n \rightarrow S_k^n$ は $f|_{\partial S_k^n} = 1$ だが、 S_k^n の標準的な PL 構造 θ に対し、 f によって誘導された PL 構造 $f^*\theta$ は、 ∂S_k^n 上で θ と一致する。従って命題6で、 $Q = S_k^n$ 、 $Q_0 := \partial S_k^n$ とすれば、 $H^3(S_k^n, \partial S_k^n, \mathbb{Z}_2) \approx H_{n-3}(S_k^n, \mathbb{Z}_2) \approx 0$ だが、 $f \sim f' \text{ rel } \partial S_k^n$ と $f': PL$ とできる。II] の ii) と同様に、 $l_{i,i+1}, \mathbb{T}_i, h_i$ を定義する。自然数 m 、 $n > m \geq 1$ について帰納法を用いる。

$f' \sim_{PL} f_{m-1}$ で $f_{m-1}: PL$ かつ $f_{m-1}|_{\partial S_k^n \cup \bigcup_{i=1}^{m-1} \mathbb{T}_i(B^{n-1} \times [0,1])} = 1$ と変形できたとする。 $f_{m-1}(l_{m,m+1})$ は折れ線だから、

$f_{m-1} \sim_{PL} f''$ で $f''|_{\partial S_k^n \cup \bigcup_{i=1}^{m-1} \mathbb{T}_i(B^{n-1} \times [0,1])} \cup l_{m,m+1} = 1$

とできる。 $\mathcal{T}_m(B^{n-1} \times [0, 1])$, $\mathcal{K}''(\mathcal{T}_m(B^{n-1} \times [0, 1]))$ は共に $\mathcal{L}_{m, m+1}$ の正則近傍。相対正則近傍の一貫性より $\mathcal{K}'' \underset{PL}{\sim} \mathcal{K}'''$ 。
 $\mathcal{K}''' / \partial S_{2m}^0 \cup \{ \bigcup_{i=1}^{m-1} \mathcal{T}_i(B^{n-1} \times [0, 1]) \} \cup \mathcal{L}_{m, m+1} = 1$ かつ
 $\mathcal{K}'''(\mathcal{T}_m(B^{n-1} \times [0, 1])) = \mathcal{T}_m(B^{n-1} \times [0, 1])$ とできる。

$\mathcal{K}''' / \mathcal{T}_m(\partial B^{n-1} \times [0, 1])$ に補題 1 を適用し, 命題 5 と Alexander
 アイソトピーにより $\mathcal{K}'' \underset{PL}{\sim} \mathcal{K}_m$ 。 \mathcal{K}_{k-1} は Alexander
 アイソトピーを用いて, $\mathcal{K}_{k-1} \underset{PL}{\sim} 1$ 。

注 5. PL カテゴリーでは, $n=4, 5$ でも成り立つ。

参考文献

- [1] Brown. M. and Gluck. H. : Stable structures on manifolds I. Ann. of math. 79 (1964) 1-17.
- [2] Edwards. R and Kirby. R: Deformations of spaces of imbeddings : Ann. of Math. 93 (1971) 63-88.
- [3] Gluck. H: Embeddings of 2-spheres in 4-sphere. Trans. Amer. Math. Soc. 104 (1962), 308-333
- [4] Hudson. J.F.P: Piecewise Linear Topology W.A. Benjamin. Inc. New York. 1969.

- [5] Kirby, R.: Stable homeomorphisms and the annulus conjecture, *Ann. of Math.* 89 (1969) 575-582
- [6] ————— Lectures on triangulations of manifolds. U.C.L.A. (Los Angeles) (1969)