数理解析研究所講究録
220巻 1974年 24-37

測地線の指数定理について

九大工　　酒井　隆

一般の境界条件の下での測地線の指数定理はW. Ambrose([1])によって与えられている。しかしその証明は非常に繁雑であって、しかも誤りを含んでいた。その誤りは大槻先生によって指摘され、高橋先生によって訂正された([7])。その後M. Klingmann([5])はHilbert space上の2次形式の理論を用いることによって、より一般の指数定理を得ている。

最近W. Klingenberg([3],[4])はgeodesic flowの観点から閉測地線に対する指数定理を得た。その方針は簡明で、幾何学的に興味深い。ここではAmbroseの指数定理をこの観点から証明できることを述べる。実際我々はJacobi場の基本的な性質だけを必要とする。§1ではgeodesic flowの観点からJacobi場を特徴づける。Ambroseによる共役点の概念はよく知られているとはいえないので§2では指数定理をきちんと書くことにする。§3でその証明の概略を述べる。

1° 準備。(M^{n+1}, g) を $n+1$ 次元 riemann 多様体，$\pi: TM \to M$ を M の接 bundle とする。$K: TTM \to TM$ を g の Levi-Civita 接続に関する接続写像とする（[2]）。このとき，各 $X \in T_xM$ に対して $\varphi: T_X TM \to T_xM \oplus T_xM$ を $\varphi(\hat{X}) := (\pi_* \hat{X}, K\hat{X})$ で定義すれば、これは linear isomorphism である。$\mathrm{Ker}\,\pi_*$ の元を vertical vector，$\mathrm{Ker}\,K$ の元を horizontal vector と呼ぶ。以下 φ によって $T_X TM$ と $T_xM \oplus T_xM$ を同一視することにして $\hat{X} := (X_h, X_v)$ と書くことにする。次に φ_t を geodesic flow とする。すなわち $X \in TM$ に対して，c を $c(0) = \pi(X)$，$\dot{c}(0) = X$ なる測地線（affine parameter）とするとき，
$\varphi_t X := \dot{c}(t)$。$\varphi_t$ の定義する TM 上の vector 場 ξ が geodesic spray で，上の notation で $\xi_X = (X, 0)$。

さて geodesic flow の orbit は測地線によって決定されるが geodesic flow で不変な vector 場を実は Jacobi 場で特徴づけることができる。次の補題は Klingenberg による。（Prof. Klingenberg は仙台での講演でこの補題の Fermi 座標を用いない簡単な証明がないか？と云われたので，その様な証明をつけておく）。

<u>Lemma</u>. $(A, B) \in T_X TM$，$(\varphi_t)_*(A, B) = (X_h(t), X_v(t))$ を geodesic flow invariant な TM 上の vector 場とする。このとき，$X_h(t)$ は $X_h(0) = A$，$\nabla X_h(0) = B$ をみたす $c(t) =$

$\pi\varphi_t X$ に沿っての Jacobi 場で、$X_v(t) = \nabla X_h(t)$ が成立する。ここに ∇ は $c(t)$ に関する共変微分を表わす。逆に $X_h(t)$ を $X_h(0) = A$, $\nabla X_h(0) = B$ なる測地線 $c(t)$ に沿っての Jacobi 場とすれば、$(X_h(t), \nabla X_h(t)) = (\varphi_t)_*(A, B)$.

証明). $X(s)$ を $X(0) = X$, $\dot{X}(0) = (A, B)$ をみたす TM 内の curve とする。このとき $s \longrightarrow \pi\circ\varphi_t\circ X(s) = \exp_{\pi X(s)} tX(s)$ は $s=0$ で接ベクトル

$$\overset{\bullet(s)}{\overbrace{\pi\circ\varphi_t\circ X(s)}}\Big|_{s=0} = \pi_*\circ(\varphi_t)_*\dot{X}(0) = \pi_*\circ(\varphi_t)_*(A, B) = X_h(t)$$

を持つ。ここに $t \to \pi\circ\varphi_t\circ X(s)$ は各固定された s に対して測地線であるから、$X_h(t)$ は Jacobi 場となる。明らかに

$X_h(0) = \pi_*(A, B) = A$ であり、$D_1 = \frac{\partial}{\partial t}$, $D_2 = \frac{\partial}{\partial s}$ とおけば

$$\nabla X_h(0) = \nabla_{D_1} X_h(0) = \nabla_{D_1}\overset{\bullet(s)}{\overbrace{\pi\circ\varphi_t\circ X(s)}}\Big|_{s=0,t=0} = \nabla_{D_2}\overset{\bullet(t)}{\overbrace{\pi\circ\varphi_t\circ X(s)}}\Big|_{s=0,t=0}$$
$$= \nabla_{D_2}\varphi_t\circ X(s)\big|_{s=0,t=0} = \nabla_{D_2} X(s)\big|_{s=0} = K X^* D_2\big|_{s=0} = K\dot{X}(0) = B.$$

を得る。他方、

$$X_v(t) = K(\varphi_t)_*(A, B) = K\overset{\bullet(s)}{\overbrace{\varphi_t X(s)}}\Big|_{s=0} = \nabla_{D_2}\varphi_t\circ X(s)\big|_{s=0}$$
$$= \nabla_{D_2}\overset{\bullet(t)}{\overbrace{\pi\circ\varphi_t\circ X(s)}}\Big|_{s=0} = \nabla_{D_1}\overset{\bullet(s)}{\overbrace{\pi\circ\varphi_t\circ X(s)}}\Big|_{s=0} = \nabla_{D_1}(\pi\circ\varphi_t)_*(A, B)$$
$$= \nabla_{D_1}\pi_*(\varphi_t)_*(A, B) = \nabla\cdot X_h(t).$$

逆は Jacobi 場 X_h が $X_h(0), \nabla X_h(0)$ によって一意に決まることから明らかである。証明終り。

TM 上には Sasaki metric G が

$$G(\hat{X}, \hat{Y}) := g(\pi_*\hat{X}, \pi_*\hat{Y}) + g(K\hat{X}, K\hat{Y}) \quad \hat{X}, \hat{Y} \in TTM$$

によって導入される。さて次に $\pi_1 : T_1M \longrightarrow M$ を g に関する M の単位接bundle、G_0 を $\iota : T_1M \hookrightarrow TM$ により、G から induceされる riemann 計量とする。$X \in T_1M$ に対して

$\varphi | T_XT_1M$ は T_XT_1M から $T_{\pi_1(X)}M \oplus \perp X$ ($\subset T_{\pi_1(X)}M \oplus T_{\pi_1(X)}M$) の上への linear isomorphism である。ここに $\perp X$ は $T_{\pi_1(X)}M$ における、g に関する X の orthogonal complement。前と同様に T_XT_1M と $T_{\pi_1(X)}M \oplus \perp X$ を同一視する。さて geodesic spray ξ は T_1M に接していることを注意する。$T^{2n}_X T_1M$ ($X \in T_1M$) $:= \perp \xi_X$ (G_0 に関する ξ_X の T_XT_1M における orthogonal complement) とおけば、上の notation で $T^{2n}_X T_1M :=$ $\perp X \oplus \perp X$ 最初の直和因子を T^n_{Xh}、第2の直和因子を T^n_{Xv} と書くことにすれば、$T^{2n}_X T_1M := T^n_{Xh} \oplus T^n_{Xv}$. T^n_{Xh} (T^n_{Xv}) を $T^{2n}_X T_1M$ の"水平部分"("垂直部分")と呼ぶ。

さて M に正規測地線 $c : [a,b] \longrightarrow M$ が与えられているとする。$\dot{c} : [a,b] \longrightarrow T_1M$ により $T^{2n}T_1M \to T_1M$ の induced bundle $\tau^{2n} : V^{2n} \longrightarrow [a,b]$ を得る。ここに各 fiber $\tau^{2n}(t)$ $= V^{2n}(t) = T^{2n}_{\dot{c}(t)}T_1M = \tau^n_h(t) \oplus \tau^n_v(t)$ は水平部分 $\tau^n_h(t)$、垂直部分 $\tau^n_v(t)$ に分解される。このとき、τ^{2n} 上には、

$2\alpha((X_h, X_v), (Y_h, Y_v)) := g(X_h, Y_v) - g(Y_h, X_v)$

によって、symplectic 形式 α が定義される。geodesic flow Φ_t は各 fibre $V^{2n}(t_0)$ を $V^{2n}(t+t_0)$ に写す。Lemma より

Φ_t ー不変な section が c に垂直な Jacobi 場で特徴づけられる。Jacobi 場の簡単な性質から $d\Phi_t$ は symplectic 形式 α を不変に保つ。最後に言葉の約束をする。$V^{2n}(t)$ の部分空間 W は $\alpha|W \equiv 0$ をみたすとき "isotropic" な部分空間と呼ばれる。Φ_t-inv. なての cross-section $\hat{Y}(t)$ に対して $\hat{Y}(t) := (Y(t), \nabla Y(t))$ と書くことにする。

2° 指数定理．(M^{n+1}, g) を Riemann 多様体．K, L を M の部分多様体，$c : [a,b] \to M$ を $c(a) \in K$, $\dot{c}(a) \perp T_{c(a)}K$; $c(b) \in L$, $\dot{c}(b) \perp T_{c(b)}L$ をみたす測地線とする。我々は K, L を結ぶ c に近い曲線で c より短いものがどれ位存在するかという問題を取扱うことにする。以下 g から定義される接空間の内積を "$\langle\ ,\ \rangle$" で表わす。

<u>2.1 境界条件</u>．$t\ (\in [a,b])$ における境界条件とは，$\mathcal{S} = (S, A_S)$ という対で，ここに S は $\perp \dot{c}(t)\ (\subset T_{c(t)}M)$ の部分空間．$A_S : S \to S$ は $\langle\ ,\ \rangle$ に関して self-adjoint な線形写像である．

Example 1. P を $c(t) \in P$, $\dot{c}(t) \perp T_{c(t)}P$ なる M の部分多様体，$H_{\dot{c}(t)}$ を P への法線方向 $\dot{c}(t)$ に関する第2基本形式とする。

$$S := T_{c(t)}P\ ;\ \langle A_S X, Y \rangle := H_{\dot{c}(t)}(X, Y) \quad X, Y \in S.$$

と定義すれば，これによって t における境界条件 $\mathcal{S} = (S, A_S)$

を得る。

$\mathcal{J}$ で C に沿う Jacobi 場で，C に垂直なもの全体のつくる vector 空間を表わす。t における境界条件 (S, A_S) が与えられたとき，

$$\mathcal{J}_S^* := \{ Y \in \mathcal{J} \mid Y(t) \in S,\ DY(t) - A_S Y(t) \perp S \}$$

$$\mathcal{J}_S := \{ Y \in \mathcal{J} \mid Y(t) \in S,\ DY(t) = A_S Y(t) \}$$

と定義する。明らかに $\dim \mathcal{J}_S^* = \dim M - 1$, $\dim \mathcal{J}_S = \dim S$。

Example 2. $\mathcal{S} = (S, A_S)$ (resp. $\mathcal{T} = (T, A_T)$) を a (resp. b) における境界条件とする。このとき，$t \in [a, b]$ における境界条件 $\mathcal{S}^*(t)$, $\mathcal{T}(t)$ を次の様に定義する。

(i) $S^*(t) := \{ Y(t) \mid Y \in \mathcal{J}_S^* \}$ (resp. $T(t) := \{ X(t) \mid X \in \mathcal{J}_T \}$)

(ii) $A_{S^*(t)} Y(t) := pr_{S^*(t)} DY(t)$ (resp. $A_{T(t)} X(t) := pr_{T(t)} DX(t)$).

ここに，$pr_{S^*(t)} : \perp \dot{c}(t) \to S^*(t)$ 等は直交射影を表わす。

(ii) は well-defined であることを注意する。$\mathcal{J}_S^* = \mathcal{J}_{S^*(t)}^*$ であるが，$\mathcal{J}_T$ と $\mathcal{J}_{T(t)}$ とは一般に一致しない。

2.2. 共役点　$\mathcal{S}$, $\mathcal{T}$ をそれぞれ a, b における境界条件とする。$t_0 \in (a, b)$ に対して vector 空間 $C(t_0)$ を

$$C(t_0) :\overset{\text{def}}{=} \{ Z(t) \mid \exists\, Y \in \mathcal{J}_S^*,\ X \in \mathcal{J}_T \text{ such that}$$
$$Z(u) = Y(u) : u \le t_0,\quad Z(u) = X(u) : u \ge t_0 ;$$
$$DY(t_0) - DX(t_0) \perp T(t_0) \}.$$

で定義する。

明らかに $\mathcal{J}_S^* \cap \mathcal{J}_T \subset C(t_0)$ であるが、$\bar{n}(t_0) := \dim C(t_0)/\mathcal{J}_{S^*} \cap \mathcal{J}_T$ が正となるとき、t_0 を ordered pair $\mathcal{S}, \mathcal{T}$ の共役点と呼び、$\bar{n}(t_0)$ をその位数と呼ぶことにする。

2.3. 指数定理 c, K, L を最初に仮定した通りとし、$\mathcal{S}$, $\mathcal{T}$ を K, L から example 1 のやり方で得られた境界条件とする。

$$\Xi := \{ c \text{ に沿っての piecewise smooth vector field } \xi(t) \text{ で } \xi(a) \in \dot{S} = T_{c(a)}K,\ \xi(b) \in T = T_{c(b)}L \text{ をみたすもの} \}.$$

$RX(t) := R(\dot{c}(t), X(t))\dot{c}(t)$ (右辺の R は曲率テンソル) とおいて、Ξ 上の指数形式 I_{ST} を次の様に定義する。

$$I_{ST}(X,Y) := \int_a^b \{\langle DX(t), DY(t)\rangle + \langle RX(t), Y(t)\rangle\}\,dt + \langle A_S X(a), Y(a)\rangle - \langle A_T X(b), Y(b)\rangle$$

$$\Big[= \int_a^b \{\langle RX(t) - DDX(t), Y(t)\rangle\}\,dt + \sum_{a<t<b} \langle DX(t-0) - DX(t+0), Y(t)\rangle + \langle DX(b) - A_T X(b), Y(b)\rangle - \langle DX(a) - A_S X(a), Y(a)\rangle \Big]$$

I_{ST} は Ξ 上の対称な双一次形式でその指数 (i.e. I_{ST} が負定値となる Ξ の maximal subspace の次元) が、"K, L を結び c により短い曲線がどれ位存在するか" を表わしている。

さて Ambrose の指数定理は、index I_{ST} が $\mathcal{S}$, $\mathcal{T}$ の共役点の位数の和と "Convexity" で表わされることを主張している。

すなわち

「Ambrose の指数定理.

$$\text{Index of } I_{ST} = \sum_{a<t<b} \bar{n}(t) + \text{Convexity}. \quad \rfloor$$

ここに Convexity は次の様に定義される。$\mathcal{N} := \{X \in \mathcal{J}_T \mid X(a) \in \mathcal{S}\}$ とおくとき，$\mathcal{N}$上では

$$I_{ST}(X, X') = \langle A_{S'}X(a) - \nabla X(a), X'(a) \rangle$$

が成立する。このとき，

$$\text{Convexity} := \text{index } I_{ST}|\mathcal{N} + \dim(\text{Null space of } I_{ST}|\mathcal{N}) / \mathcal{J}_S^* \cap \mathcal{J}_T .$$

3° 定理の証明。以下 geodesic flow の観点から Ambrose の指数定理の証明の概略を述べる。

<u>第一段</u>. まず与えられた境界条件 $\mathcal{S}, \mathcal{T}$ から $V^{2n}(b)$ の n次元 isotropic subspace $V^n(b)$ を構成できることを示す。これは以下の証明で本質的な役割りを果す。

$N := S^*(b) \cap T$ とおいて，

$$S^*(b) = S_1 \oplus N, \quad T = T_1 \oplus N, \quad \perp \dot{c}(b) = S_1 \oplus T_1 \oplus N \oplus A$$

をそれぞれ $S^*(b)$, $\perp \dot{c}(b)$ の直交分解とする。$V^{2n}(b)$ の次の3つの部分空間を考える。

a): $V_1 = \{\hat{Y}(b) = (Y(b), \nabla Y(b)) \mid Y \in \mathcal{J}_S^*, \nabla Y(b) - A_T \mathrm{pr}_T Y(b) \perp T\}$.

と定義する。いま $\Phi : S^*(b) \longrightarrow N$ なる線形写像を

$$\Phi(Y) := \mathrm{pr}_N(A_{S^*(b)} Y - A_T \mathrm{pr}_N Y)$$

によって定義する。このとき，次の補題の成立することは容

易に分かる。

<u>Lemma 1</u>. $\hat{Y}(b)\in\mathfrak{V}_1 \iff Y(b)\in \mathrm{Ker}\,\Phi$ であって、

$$pr_{S_1}\nabla Y(b) = pr_{S_1}A_{S^*(b)}Y(b),\quad pr_{T_1}\nabla Y(b) = pr_{T_1}A_T\, pr_N Y(b)$$
$$pr_N \nabla Y(b) = pr_N A_{S^*(b)}Y(b)\ (= pr_N A_T\, pr_N Y(b))$$

b): $\Psi: N \to S^*(b)$ なる線型写像を

$\Psi(x) := pr_{S^*(b)}(\nabla Y(b)-\nabla X(b))$ — ここに $X\in\mathfrak{g}_T$ は $X(b)=x$, $Y\in\mathfrak{g}^*_{S^*(b)}=\mathfrak{g}^*_S$ は $Y(b)=x$ をみたす様にとる —— によって定義する。Ψ の定義は $Y(b)=x$ をみたす $Y\in\mathfrak{g}^*_S$ の選び方によらないことはすぐ分る。$\dim\Psi(N)=d$ とし、$x_1,\cdots x_d\in N$ を対応する $\Psi(x_1),\cdots\Psi(x_d)$ が $\Psi(N)$ の基底となっている様に選ぶ。X_i $(i=1,\dots,d)\in\mathfrak{g}_T$ を $X_i(b)=x_i$ となる様に選んでおいて、

$\mathfrak{V}_2 :=V^{2n}(b)$ の部分空間で、$\hat{X}_i(b)=(X_i(b),\nabla X_i(b))$ $(i=1,\cdots d)$ によって生成されるもの。

と定義する。明らかに $\dim\mathfrak{V}_2=d$.

最後に

c): $\mathfrak{V}_3=\{\hat{X}(b)=(X(b),\nabla X(b)) \mid X\in\mathfrak{g}_T,\ X(b)\in T_1\}$

と定義すれば、$\dim\mathfrak{V}_3=\dim T_1$. $\mathfrak{V}_1\cap\mathfrak{V}_2=\{0\}$, $(\mathfrak{V}_1\oplus\mathfrak{V}_2)\cap\mathfrak{V}_3=\{0\}$ であることは容易に分かる。更に Ψ は Φ の adjoint な線形写像に他ならないことを用いれば、補題1に注意して

<u>Lemma 2</u>. $V^n(=V^n(b)) := \mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{V}_2 \oplus \mathbb{V}_3$ は $\mathbb{V}^{2n}(b)$ の n 次元 isotropic な部分空間である。

を示すことができる。

<u>第2段</u> さて $V^n_V(t) := \{\hat{Y}(t) = (Y(t), \nabla Y(t)) \mid Y \in \mathcal{J},\ Y(t) = 0\}$,

$V^n(t) := d\phi_{t-b} V^n(b) = \{\hat{U}(t) = (U(t), \nabla U(t)) \mid U \in \mathcal{J},\ \hat{U}(b) \in V^n(b)\}$

$W(t) := V^n(t) \cap V^n_V(t)$

と定義する。この小節では ordered pair $\mathcal{S}, \mathcal{T}$ の共役点を $W(t)$ によって記述することができることを示そう。そのために線形写像 $\chi_{t_0} : C(t_0) \to W(t_0)$ を次の様に定義する。

$Z \in C(t_0)$ とする。定義によって、

$\exists X \in \mathcal{J}_T,\ Y \in \mathcal{J}^*_S$ such that

$Z(u) = Y(u) : u \leq t_0,\ \ Z(u) = X(u) : u \geq t_0$;

$\nabla Y(t_0) - \nabla X(t_0)\ (= \nabla Z(t_0 - 0) - \nabla Z(t_0 + 0)) \perp T(t_0)$.

いま $\hat{Y}(b) = (Y(b), \nabla Y(b)) \in \mathbb{V}_1$ であることがすぐ確かめられる。次に $X(t) = X_1(t) + X_2(t) + X_3(t)$ — $\hat{X_2}(b) \in V_2,\ \hat{X_3}(b) \in \mathbb{V}_3$, $X_1(b) \in \mathrm{Ker}\, \Phi$ — と分解することができる。実は $\hat{X}_1(b) \in \mathbb{V}_1$ となることが示される。そこで

$\chi_{t_0} Z := \hat{Y}(t_0) - \hat{X}(t_0)$

と定義すれば、χ_{t_0} は $C(t_0)$ から $W(t_0)$ への線形写像である。さて χ_{t_0} は surjective であり、かつ $\mathrm{Ker}\, \chi_{t_0} = \mathcal{J}_T \cap \mathcal{J}_S^*$ であることは容易に示される。したがって、

Lemma 3. $\dim W(t) = \bar{n}(t)$ $a<t<b$. 特に $t_0 \in (a,b)$ が S, T の共役点 $\Longleftrightarrow$ $\dim \varpi(t) > 0$.

次の補題はよく知られている。

Lemma 4. $n_0 = \bar{n}(t_0) = \dim \varpi(t_0) > 0$ とする。$V^n(t_0) = d\phi_{t_0 \to b} V^n(b)$ の基底 $\{U_i(t_0)\}_{i=1,\cdots n}$ を $\{U_i(t_0)\}_{i=1,\cdots,n_0}$ が $\varpi(t_0)$ の基底となっている様に選ぶ。このとき、

(i) $\nabla U_i(t_0)$ $1 \leq i \leq n_0$, $U_j(t_0)$, $n_0+1 \leq j \leq n$ は $\perp \dot{c}(t_0)$ の基底を形成する。

(ii) $t \neq t_0$ が t_0 に充分近いとき、$\{U_i(t)\}_{1\leq i \leq n}$ は $\perp \dot{c}(t)$ の基底である。

特に $\bar{n}(t)$ は有限個の t の値を除いて 0 である。

第3段. 補題3から

$$\text{Index } I_{ST} = \sum_{a<t<b} \dim \varpi(t) + \text{Convexity}$$

を証明できればよい。

まず S, T に関する共役点 $t_0 \in (a,b)$ に対して、$C(t_0)$ の $\mathcal{J}_{S^*} \cap \mathcal{J}_T$ に complementary な部分空間 $\zeta\varpi(t_0)$ を選ぶ。このとき、$I_{ST}(\zeta W(t_0), \zeta W(t_0')) = 0$ であって、異なる t_0 の値に対する $\zeta W(t_0)$ は互いに独立である。次に、

ζ_0 : $I_{ST}|\mathcal{X}$ が負定値である様な $\mathcal{X}$ の maximal な部分空間.

ς_1 : $I_{ST}|\mathfrak{X}$ の null space の部分空間で $\mathfrak{g}_S^* \cap \mathfrak{g}_T$ に complementary なもの.

と定義する。明らかに $\varsigma_0, \varsigma_1, \varsigma W = \bigoplus_{a<t<b} \varsigma W(t)$ は互いに独立であって $I_{ST}(\varsigma_0, \varsigma_1 \oplus \varsigma W) = 0$ である。更に $I_{ST}|\varsigma_1 \oplus \varsigma W \equiv 0$ であって, $\varsigma_1 \oplus \varsigma W$ の元は I_{ST} の null space $\mathfrak{g}_S^* \cap \mathfrak{g}_T^*$ に属さないことに注意すれば,

$$\mathrm{index}\, I_{ST} \geqq \dim \varsigma = \sum_{a<t<b} \dim W(t) + \mathrm{Convexity}.$$

ただし $\varsigma = \varsigma_0 \oplus \varsigma_1 \oplus \varsigma W$ とおいた。

第4段 上の不等式で実際に等号が成立することを確かめるには,

「$\xi \in \Xi$ が $I_{ST}(\xi, \eta) = 0$ for $\forall \eta \in \varsigma$ をみたせば, $I_{ST}(\xi, \xi) \geqq 0$」が成立することを示せば充分である。

まず $I_{ST}(\xi, \varsigma W) = 0$ から, $\forall \hat{U}(t_0) \in W(t_0)$ $(a<t_0<b)$ に対して,

$$\langle \xi(t_0), \nabla U(t_0) \rangle = I_{ST}(\xi, Z) = 0, \quad \text{ただし } Z = (\chi_{t_0}|\varsigma W(t_0))^{-1} \hat{U}(t_0)$$

を得る。したがって補題4から $\xi(t) = \sum_{i=1}^{n} w^i(t) U_i(t)$ と書くことができる。ここで $d\phi_{t-b} V^n(b)$ の基底 $\{U_i(t)\}_{1 \leqq i \leqq n}$ は $\{U_i(b)\}_{1 \leqq i \leqq t = \dim T}$ が T の基底になっている様に選ぶことができる。したがって $w^i(b) = 0$ $i > t$ としてよい。さて

$$I_{ST}(\xi, \xi) = \int_a^b |\dot{w}^i(t) U_i(t)|^2 dt - \langle \sum w^i(b)(A_T U_i(b) - \nabla U_i(b),$$

$\sum_j w^j(b)v_j(b)\rangle + \langle \sum w^i(a)(A_S v_i(a) - \nabla v_i(a), \sum w^j(a)v_j(a)\rangle$.

ここで $\xi(b)\in T$ より $\langle \sum w^i(b)(A_T v_i(b) - \nabla v_i(b), \sum w^j(b)v_j(b)\rangle = 0$ が分かる。次に $\xi(a)\in S$ であるから Jacobi 場 $\sum w^i(a)v_i(t)$ は $v_S(t)+v_T(t)$ — ただし $v_S(t)\in d\phi_{t-b}V_1$, $v_T\in\mathcal{H}$ — の形にかける。$I_{ST}(v_T, S_0\oplus S_1) = I_{ST}(\xi, S_0\oplus S_1) = 0$ が条件から成立し、S_0, S_1 の定義の仕方から、$I_{ST}(v_T, v_T)\geq 0$ でなければならない。したがって、$\langle \sum w^i(a)(A_S v_i(a) - \nabla v_i(a)), \sum w^j(a)v_j(a)\rangle = \langle A_S v_T(a) - \nabla v_T(a), v_T(a)\rangle = I_{ST}(v_T, v_T)\geq 0$.

以上から $I_{ST}(\xi,\xi)\geq 0$ を得る。(証明終り).

Remark. Ambrose は convexity を次の様に定義した。t を a に十分近いとして、$\Xi(S, T(t)) = c|[a,t]$ に沿っての piecewise smooth な vector 場で $\xi(a)\in S$, $\xi(t)\in T(t)$ をみたすもののつくる vector 空間、と定義する。index $I_{ST(t)}$ on $\Xi(S, T(t))$ で convexity を定義する。しかし上の証明は、これが $\dim S_0 + \dim S_1$ に等しいことも示している。

References

[1] Ambrose,W, The index theorem in Riemannian geometry, Ann.of Math., 73(1961) 49-86.

[2] Gromoll,D;Klingenberg,W;Meyer,W. Riemannsche Geometrie im Grossen, Lecture Notes in Math. 55, Springer (1968).

[3] Klingenberg,W. Manifold with geodesic flow of Anosov type, Ann.of Math.(1974).

[4] ------------- The index theorem for closed geodesics, Tôhoku Math. J. (to appear).

[5] Klingmann,M. Das Morse'sche Indextheorem bei allgemeinen Randbedingungen, J.Diff.Geo.,1(1967) 371-380.

[6] Sakai,T. On the index theorem of Ambrose, to appear.

[7] Takahashi,T. Correction to [1]. Ann.of Math.80(1964) 538-541.