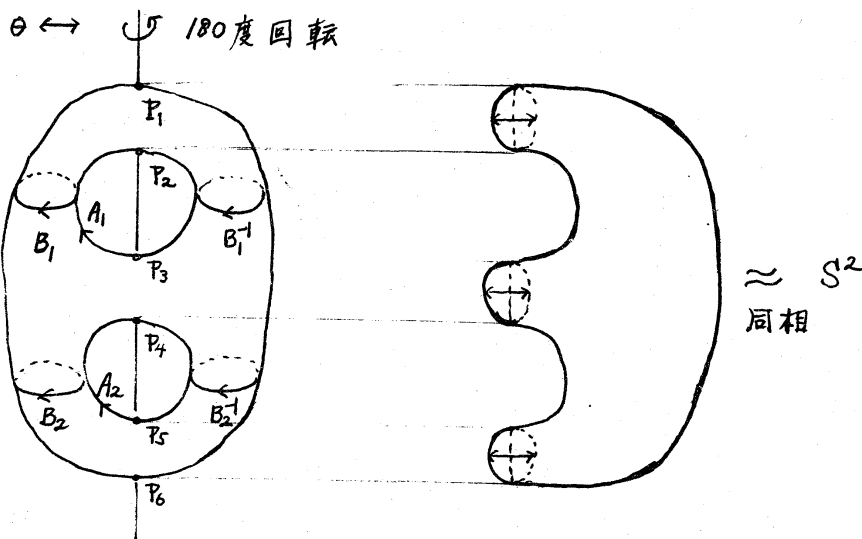


M_2 上の holomorphic θ -line bundles 島根大文理 1.
松永弘道

M_2 を genus 2 の compact Riemann surface とする。[2] の Theorem 25 (P 228) および P 244 によれば M_2 は holomorphic involution θ をもち、 M_2/θ は complex projective line $\mathbb{P}^1 = S^2$ となる。 θ は 6 個の fixed points をもつ。さらに Corollary 1 (P 246) によれば、この様な θ は一意に存在する。このことから θ は位相的には次の図の様な involution であることがわかる。



$P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ は θ による固定点であって、 θ によって一次元 homology basis は次の様に変換される。

$$A_1 \rightarrow (-A_1), B_1 \rightarrow (-B_1), A_2 \rightarrow (-A_2), B_2 \rightarrow (-B_2)$$

目標 M_2 上の holomorphic θ -line bundles の同値類の個数は各 degree について有限であることを示すこと。

\mathcal{O}^* を M_2 上の sheaf of germs of nowhere vanishing holomorphic functions とすると \mathcal{O}^* は θ -sheaf である。何となれば $f_x \in \mathcal{O}_x$

おける holomorphic function の germ とするとき, θ の作用 $\tilde{\theta}$ を ²

$$\tilde{\theta}(f_x) = (f \circ \theta^{-1})_{\theta(x)}$$

で定義すればよいからである。

性質 1. M_2 上の holomorphic line bundles の各同値類は高々 2 個の holomorphic θ -line bundles の同値類を含む。

証明 [1] の 143-03 を $\mathcal{G} = \theta^*$, $\pi = Z_2$ の場合に適用すると

$$(I) \quad e \rightarrow H^1(Z_2, H^0(M_2, \theta^*)) \xrightarrow{i} H^1(M_2, Z_2; \theta^*) \rightarrow H^1(M_2, \theta^*)^{Z_2}$$

において $H^0(M_2, \theta^*) = \Gamma(M_2, \theta^*) = \mathbb{C}^*$ (M_2 は compact, $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$)

M_2 上の holomorphic function $M \rightarrow \mathbb{C}^* \subset \mathbb{C}$ は定数であるから $H^1(Z_2, H^0(M, \theta^*))$ の元 $\{\varphi\}$ に対して

$$1 = \varphi(\theta^2) = \varphi(\theta) \cdot \varphi(\theta), \quad \therefore \varphi(\theta) = \pm 1.$$

よって φ と φ' とが同値であるための必要十分条件は

$$\exists m \in H^0(M, \theta^*) \text{ s.t. } \varphi'(\theta) = m \varphi(\theta) \quad (\theta \cdot m)^{-1} = \varphi(\theta)$$

よって $\varphi = \varphi'$ が成り立つことである。従って

$$H^1(Z_2, H^0(M, \theta^*)) = Z_2$$

が得られる。証明終り。

定義 \mathcal{G} を M_2 上の θ -sheaf とする。 \mathcal{U} を M_2 上の一つの開集合とし, $\Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{G})$ を \mathcal{U} 上のすべての section のなす abel 群とすると,

$$\theta : \Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \longrightarrow \Gamma(\theta\mathcal{U}, \mathcal{G})$$

と

$$(\theta s)(\gamma) = \tilde{\theta}(s \cdot \theta^{-1}(\gamma))$$

で定義する。

この定義を transition function $g_{ij}: U_i \cap U_j \rightarrow \mathcal{O}^*$ に適用すると $\theta g_{ij}: \theta U_i \cap \theta U_j \rightarrow \mathcal{O}^*$ は次の式をみたす。

$$(\theta g_{ij})(\gamma) = \tilde{\theta}(g_{ij} \cdot \theta^{-1}(\gamma)) = (g_{ij} \cdot \theta^{-1})_{\gamma}$$

従って θ は自己同型写像 $\theta: H^1(M, \mathcal{O}^*) \rightarrow H^1(M, \mathcal{O}^*)$ を与える。

性質 2. $E \rightarrow M_2$ を holomorphic θ -line bundle とすると, $\theta \{E\} = \{E\}$ がなりたつ。ただし $\{E\}$ は E の同値類を表わす。

証明. M_2 は holomorphic θ -line bundle であるから $\theta: M \rightarrow M$ の lift としての involution $\bar{\theta}: E \rightarrow E$ をもつ。 $\hat{\theta}_i \pm \psi_{\theta(i)} \cdot \bar{\theta} \cdot \psi_i^{-1}$ で定義する。ただし ψ_i は E の local triviality である。

すると可換図式

$$\begin{array}{ccc} (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C} & \xrightarrow{\hat{\theta}_i} & (\theta U_i \cap \theta U_j) \times \mathbb{C} \\ \uparrow \psi_i & & \uparrow \psi_{\theta(i)} \\ E|_{U_i \cap U_j} & \xrightarrow{\bar{\theta}} & E|_{\theta U_i \cap \theta U_j} \\ \downarrow \psi_j & & \downarrow \psi_{\theta(j)} \\ (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C} & \xrightarrow{\hat{\theta}_j} & (\theta U_i \cap \theta U_j) \times \mathbb{C} \end{array}$$

から $g_{\theta(i)\theta(j)} = \hat{\theta}_j \cdot (g_{ij} \cdot \theta^{-1}) \cdot \hat{\theta}_i^{-1}$ が得られ $(g_{\theta(i)\theta(j)})$ と $(g_{ij} \cdot \theta^{-1})$ とは同値となる。証明終り。

$P_0(M) = \{\xi \in H^1(M, \mathcal{O}^*) ; c_1(\xi) = 0\}$ とおく。ただし, c_1 は first Chern class を表わす。Chern class の naturality によつて θ は自己同型 $\theta : P_0(M) \rightarrow P_0(M)$ をひきおこす。

$\mathcal{O}^{1,0}$ は M_2 上の the sheaf of germs of abelian differentials とし, \mathcal{L}, \mathcal{S} は sheaves の exact sequence $0 \rightarrow \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}^{1,0} \rightarrow 0$ に関連した cohomology exact sequence の coboundary とすると δ は中への同型となり, 次の自然な同型がなりたつ。[2] の p134.

$$P_0(M) \cong \frac{H^1(M_2, \mathbb{C})}{H^1(M_2, \mathbb{Z}) + \delta \Gamma(M_2, \mathcal{O}^{1,0})},$$

ここで \mathbb{C} は複素数体, \mathbb{Z} は整数全体のなす加群, $\Gamma(M_2, \mathcal{O}^{1,0})$ は abelian differentials のなす加群を表わす。

本稿 p.1 の一次元 homology classes A_1, B_1, A_2, B_2 の Poincaré dual を a_1, b_1, a_2, b_2 とすると

$$\theta(a_1) = -a_1, \quad \theta(b_1) = -b_1, \quad \theta(a_2) = -a_2, \quad \theta(b_2) = -b_2$$

を得る。 $H^1(M, \mathbb{Z})$ および $H^1(M, \mathbb{C})$ の basis としてこれらをとることにする。 $P_0(M)$ の元 ξ の代表元をこれらの basis で表わすとき, 上記の同型が θ -equivariant であるから

$$\theta(\xi) = \xi \iff \begin{pmatrix} 2\alpha_1 - x_1 w_{11} - x_2 w_{12} \\ 2\alpha_2 - x_1 w_{21} - x_2 w_{22} \\ 2\alpha_3 - x_1 w_{31} - x_2 w_{32} \\ 2\alpha_4 - x_1 w_{41} - x_2 w_{42} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \end{pmatrix},$$

ここで (α_i) は ξ の代表元, $(w_{i,j})$ は $\delta \Gamma(M_2, \mathcal{O}^{1,0})$ の

basis を表ゆし, α_1, α_2 は複素数, $n_i, i=1, \dots, 4$ は整数である。
従って $\theta(\xi) = \xi$ であるための必要十分条件は

$$\alpha_i \equiv \frac{n_i}{2} \pmod{\delta \Gamma(M_2, \theta^{1,0})}, \quad i=1, \dots, 4$$

である。よってこの標本ものは整数と $\delta \Gamma(M_2, \theta^{1,0})$ を法として考えると $n_i = 0$ 又は $\frac{1}{2}$, $i=1, 2, 3, 4$ の高々 $2^4 = 16$ 個しかない。

次に ξ を first Chern class $C_1(\xi) = 1$ である holomorphic θ -line bundle とし, η を同じ条件を満たす holomorphic θ -line bundle とすると $\xi \cdot \eta^{-1} \in P_0(M_2)$ 満たすから P_1 の目標は達せられた。

例 (U_i, π_i) を M_2 の complex structure を与える local coordinates とする。 $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ のとき, $f(z_j) = z_i$ とおく。このとき,

$$\kappa_{ij} = 1 / \frac{df(z_j)}{dz_j}$$

が定める canonical bundle κ は holomorphic θ -line bundle である。

Weil の公式について。

研究集会の際 Weil の公式の Grothendieck による定式化 [I], P.13 を用いて θ の fixed points における point bundles が holomorphic θ -line bundle ではないと述べましたが, その後 Grothendieck による定式化自体に無理があり, これらの point bundles は holomorphic θ -line bundles であるとの結論を得ましたので, このことについて訂正と詳述とを追記致します。

[3], p63 の公式を $\Gamma = \Gamma' = 1, \Theta' = 1$ の場合に適用する.

P.1 の各 fixed point $P_i, i=1, \dots, 6$ では local coordinate $(U(P_i), z)$ を適当にえらんで $P: M_2 \rightarrow M_2/\theta$ は P_i の近くで $P(z) = z^2, \theta(z) = -z$ がなりたつ様にできる. 実 P_i の近くでの meromorphic function $d(z)$ は $d(-z) = v(z) \cdot d(z)$, $v(z)$ は holomorphic function, とみれば $\text{degree } 1$ の local divisor とよばれる. ([3], p. 54, p. 52). もし $d(z)$ が P_i において $\text{degree } 1$ の pole をもつ meromorphic function であれば $v(0) = -1$ がなりたつ. $M_2 \xrightarrow{P} M_2/\theta$ においては

$$i(d(z)) = -\frac{1}{2}, \quad [3], p52. \quad \Theta \text{ 是}$$

$$\Theta_P = \begin{cases} d(z) & \text{if } P = P_i \\ I_P & \text{if } P \neq P_i \end{cases}, \quad [3] p56.$$

で定義される M_2/θ 上の $\text{degree } 1$ の divisor とする.

$$N = \dim \left\{ \Phi : \text{meromorphic function on } M_2/\theta = \mathbb{P} \text{ s.t. } \Theta \Phi, \text{ hol.} \right\}$$

$$\sigma = \dim \left\{ dI : \text{differential on } \mathbb{P} \text{ s.t. } \left(\frac{dI}{dz} \right) / \Theta, \text{ hol.} \right\}$$

$$I(\Theta) = \sum_P i(\Theta_P) = i(d(z)) = -\frac{1}{2},$$

とおき, ζ_{P_i} は divisor $d(z)$ が定める point bundle ([2], p114) とする. $\text{line bundle } P_*(\zeta_{P_i})$ に関する Riemann Roch の定理によつて

$$g(P_*(\zeta_{P_i})) = N - \sigma + 1.$$

上の Θ が θ -divisor とあることより ζ_{P_i} は holomorphic θ -line bundle とある. ([1], p. 06~07). 従つて [3], p63 の公式によつて

$$-\frac{1}{2} = I(\Theta) = G(P_*(\xi_i)) + \frac{1}{2}, \quad \therefore G(P_*(\xi_{pi})) = -1.$$

[2], p.114 によると $G(\xi_{pi}) = 1$ である。

参考文献

- [1] A. Grothendieck, Sur le memoire de weil [4], Generalisation des fonctions abeliennes, Semi. Bourbaki 1956 141. 01-15.
- [2] R. C. Gunning, Lectures on Riemann Surfaces, Princeton, 1966.
- [3] A. Weil, Generalisation des fonction abeliennes, J. math. pures et appl. t17, 1938.