

コホモロジー複素射影空間上の  
可微分  $SU(n)$  作用について

阪大理 内田伏一

§1. 或る isotropy 型をもった  $SU(n)$  作用.

$E$  を可微  $SU(n)$  作用をもった多様体とする ( $n \geq 3$ ). さらに,  $E$  の各点の isotropy 群の単位元を含む連結成分が,  $SU(n)$  において

$$SU(n-1) \text{ または } NSU(n-1)$$

と共役であると仮定する. ここに  $NSU(n-1)$  は  $SU(n)$  における  $SU(n-1)$  の正規化群である. このとき

$$S^1 = NSU(n-1) / SU(n-1)$$

は,  $X = F(SU(n-1), \overset{E}{\text{pt}})$  に自然に作用する. ただし,  $X$  は  $SU(n-1)$  作用に属する  $E$  の不動点集合である. 従って,  $SU(n)$  同変右写像

$\Phi: SU(n) / SU(n-1) \times_{S^1} X \rightarrow E, [g \cdot SU(n-1), x] \rightarrow g \cdot x$   
が定義できるが,

$$g \in SU(n), g^{-1} SU(n-1) g \subset NSU(n-1) \Rightarrow g \in NSU(n-1)$$

が成り立つこと、および可微分スライス定理によって、 $\alpha$  は微分同相写像である。

この事実を使えば、次の補題を証明できる。

**補題 1-1**  $V$  を実  $SU(n)$  ベクトル空間とする ( $n \geq 3$ )。

もし、 $V$  の非零ベクトルの isotropy 群の単位元を含む連結成分が、常に  $SU(n-1)$  または  $NSU(n-1)$  と共役であれば、 $V$  は  $SU(n)$  の標準的な作用をもつた  $\mathbb{R}^{2n}$  と実  $SU(n)$  ベクトル空間として同値である。

次に、 $M$  を可微分  $SU(n)$  作用をもつた多様体とする ( $n \geq 3$ )。さらに、 $M$  の各点の isotropy 群の単位元を含む連結成分が、 $SU(n)$  において

$$SU(n-1), NSU(n-1), SU(n)$$

のいずれかと共役であると仮定する。不動点集合

$$F = F(SU(n), M)$$

が空集合であれば、先の考察によって、 $SU(n)$  多様体として

$$(1.2) \quad M = SU(n) / SU(n-1) \times_{S^1} F(SU(n-1), M)$$

である。いま、 $F \neq \emptyset$  であるとし、 $M$  における  $F$  の  $SU(n)$  不変な肉管状近傍を  $U$  とする。このとき  $SU(n)$  多様体としての分割

$$M = U \cup (SU(m)/SU(m-1) \times_{S^1} X)$$

がある。ただし、 $X = F(SU(m-1), M - \text{int } U)$  である。さて  $SU(m)$  多様体として

$$\partial U = SU(m)/SU(m-1) \times_{S^1} \partial X$$

であり、補題 1-1 によって、 $\partial U$  の各点の isotropy 群は  $SU(m-1)$  と共役であるから、 $\partial X$  上の  $S^1$  作用は free である。再び、補題 1-1 を使って、球体束  $U \rightarrow F$  は、球体束

$$D^{2n} \times_{S^1} \partial X \longrightarrow \partial X / S^1$$

と、 $SU(m)$  作用をもつ球体束として同値であることが分かる。従って、 $SU(m)$  多様体として

$$(1.3) \quad M = \partial(D^{2n} \times X) / S^1 = D^{2n} \times_{S^1} \partial X \cup S^{2n-1} \times_{S^1} X$$

である。

§2.  $HP_{n+1}(\mathbb{C})$  上の  $SU(n)$  作用。

$2n$  次元の可微分連結実多様体  $M$  について、コホモロジー環の同型

$$H^*(M; \mathbb{Q}) = H^*(P_n(\mathbb{C}); \mathbb{Q})$$

が成り立つとき、 $M = HP_n(\mathbb{C})$  と書くことにし、 $M \in \mathbb{Q}$  上のコホモロジー複素射影空間という。

**定理 2-1**  $n \geq 7$ ,  $0 \leq k < n-4$  とする.  $HP_{n+k}(\mathbb{C})$  上の任意の自明でない可微分  $SU(n)$  作用に対して, 不動点集合は, 或る  $HP_k(\mathbb{C})$  であり,  $SU(n)$  多様体として

$$HP_{n+k}(\mathbb{C}) = \partial(D^{2n} \times X) / S^1$$

と表わすことができる. ここに,  $X$  は  $2k+2$  次元のココンパクトで向きづけ可能な可微分  $S^1$  多様体で,  $\partial X$  上の  $S^1$ -作用は free であり,  $\tilde{H}^*(X; \mathbb{Q}) = 0$  が成り立つ.

証明.  $n \geq 7$  のとき,  $SU(n)$  の連結閉部分群  $G$  について,

$$n^2 - 4n + 7 < \dim G < \dim SU(n) = n^2 - 1$$

であれば,  $G$  は  $SU(n)$  において  $SU(n-1)$  または  $NSU(n-1)$  と共役であることが分かる. 従って,  $0 \leq k < n-4$  のとき,  $2n+2k$  次元多様体上の任意の  $SU(n)$  作用に対して, 各点の isotropy 群の単位元の連結成分は,

$$SU(n-1), NSU(n-1), SU(n)$$

のいずれかと共役になる. 故に §1 の結果を適用することができる.

まず,  $M = HP_{n+k}(\mathbb{C})$  上の任意の可微分  $SU(n)$  作用に対して, 不動点があること, 即ち

$$F = F(SU(n), M) \neq \emptyset$$

であることを示そう. もし,  $F = \emptyset$  であれば (1.2) によ

で、可微分ファイバー束

$$F(SU(n-1), M) \longrightarrow M \longrightarrow P_{n-1}(\mathbb{C})$$

が存在する。従って

$$\chi(M) = \chi(P_{n-1}(\mathbb{C})) \cdot \chi(F(SU(n-1), M))$$

が成り立つことになり、

$$k+1 \equiv 0 \pmod{n}.$$

これは、仮定  $0 \leq k < n-4$  によって不可能である。故に  $F \neq \emptyset$  となり、(1.3) によって、 $SU(n)$  多様体として

$$M = \partial(D^{2n} \times X) / S^1 = D^{2n} \times_{S^1} \partial X \cup S^{2n-1} \times_{S^1} X$$

と表わすことができる。ここに、 $X$  は  $2k+2$  次元の連結かつコンパクトで向きづけ可能な可微分  $S^1$  多様体であって、 $\partial X$  上の  $S^1$  作用は *free* である。次に  $\tilde{H}^*(X; \mathbb{Q}) = 0$  を示そう。

$$H^L(M, S^{2n-1} \times_{S^1} X; \mathbb{Q}) \cong H^{L-2n}(\partial X / S^1; \mathbb{Q}), \quad L = 0, 1, 2, \dots$$

が成り立つので、

$$H^L(M; \mathbb{Q}) \cong H^L(S^{2n-1} \times_{S^1} X; \mathbb{Q}), \quad L \leq 2n-2$$

が成り立つ。この事実と、 $k < n-4$  を使って

$$H^*(\partial(D^{2n} \times X); \mathbb{Q}) \cong H^*(S^{2n+2k+1}; \mathbb{Q})$$

が証明できる。故に、Poincaré-Lefschetz duality を用いて

$$\tilde{H}^*(X; \mathbb{Q}) = 0$$

が示され、さらに、 $H^*(\partial X; \mathbb{Q}) \cong H^*(S^{2k+1}; \mathbb{Q})$  が成り立つ。

従って,  $\partial X/S^1 = HP_{n+k}(\mathbb{C})$  が成り立つ. (終)

### §3. $HP_{n+k}(\mathbb{C})$ 上の $SU(n)$ 作用の構成

#### 定理 2-1 の分解

$$HP_{n+k}(\mathbb{C}) = \partial(D^{2n} \times X)/S^1$$

の存在を使って,  $S^1$  多様体  $X$  を構成することによって, ある  $HP_{n+k}(\mathbb{C})$  上の  $SU(n)$  作用を具体的に構成してみよう.

まず, 次の補題を準備する (証明省略)

**補題 3-1**  $X$  をコンパクトで向きづけ可能な  $2n+2$  次元の可微分  $S^1$  多様体とする.  $\partial X$  上の  $S^1$  作用が *free* であり,

$$\tilde{H}^*(X; A) = 0, \quad A = \mathbb{Z} \text{ (又は } \mathbb{Q})$$

が成り立つとする.  $n \geq 2$  であれば,

$$M = \partial(D^{2n} \times X)/S^1$$

について,

$$(a) \quad H^*(M; A) \cong H^*(HP_{n+k}(\mathbb{C}); A),$$

$$(b) \quad \pi_1(M) \cong \pi_1(X),$$

が成り立ち, さらに  $n+k \geq 3$  であって,  $X$  が可縮であると仮定すれば,  $M$  は  $HP_{n+k}(\mathbb{C})$  と微分同相になる.

**定理 3-2**  $n \geq 2$  とする.

(a)  $k \geq 1, p \geq 1$  に対して, 可微分  $SU(n)$  作用をもつ  $k$  多様体  $M = HP_{n+k}(\mathbb{C})$  で,

$$\pi_1(M) \cong \mathbb{Z}_p, \quad F(SU(n), M) \cong P_k(\mathbb{C})$$

を満たすものが存在する.

次に,  $G$  を有限表示可能な群で,  $H_1(G; \mathbb{Z}) = H_2(G; \mathbb{Z}) = 0$  とすれば,

(b)  $k \geq 3$  のとき, 可微分  $SU(n)$  作用をもつ  $k$  多様体  $M = HP_{n+k}(\mathbb{C})$  で,

$$\pi_1(M) \cong G, \quad H^*(M; \mathbb{Z}) \cong H^*(P_{n+k}(\mathbb{C}); \mathbb{Z}),$$

$$F(SU(n), M) = P_k(\mathbb{C})$$

を満たすものが存在する.

(c)  $k \geq 3$  のとき,  $P_{n+k}(\mathbb{C})$  上の可微分  $SU(n)$  作用で

$$\pi_1(F) \cong G, \quad H^*(F; \mathbb{Z}) \cong H^*(P_k(\mathbb{C}); \mathbb{Z})$$

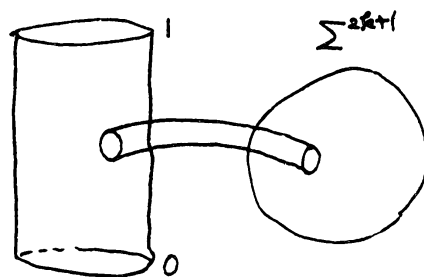
を満たすものが存在する. ただし,  $F = F(SU(n), P_{n+k}(\mathbb{C}))$ .

証明. 補題 3-1 によって, ある種の  $S^1$  多様体  $X$  を構成すれば十分である.

(i)  $k \geq 1$  とする.

$$W = P_k(\mathbb{C}) \times [0, 1] \# \Sigma^{2k+1} \text{ とおく.}$$

ただし,



$$H^*(\Sigma^{2k+1}; A) \cong H^*(S^{2k+1}; A), \quad A = \mathbb{Z} \text{ (or } \mathbb{Q})$$

このとき,  $\partial W = P_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) \times 0 \cup P_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) \times 1$  であって,

$$(1) \quad \pi_1(W) \cong \pi_1(\Sigma^{2k+1}),$$

$$(2) \quad H^*(W; A) \cong H^*(P_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}); A)$$

が成り立ち, さらに可微分主  $S^1$  束  $\pi: E \rightarrow W$  で,

$$\begin{array}{ccc} \partial: E & \longrightarrow & P_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) \times L \quad (L=0,1) \\ \parallel & & \\ \pi^{-1}(P_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) \times L) & & \end{array}$$

が, Hopf 束  $S^{2k+1} \rightarrow P_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$  と同値になるものが存在し,

$$(1) \quad \pi_1(E) \cong \pi_1(W),$$

$$(2) \quad H^*(E, \partial: E; A) = 0$$

が成り立つ. そこで

$$X = E \cup_{\partial: E} D^{2k+2}$$

とすれば,  $X$  はコンパクト連結向きづけ可能な  $2k+2$  次元可微分多様体で, 準自由可微分  $S^1$  作用をもつ,  $\partial X = S^{2k+1}$  上の  $S^1$  作用は *linear* かつ *free* である. さらに

$$(1) \quad \pi_1(X) \cong \pi_1(\Sigma^{2k+1}),$$

$$(2) \quad H^*(X; A) = 0$$

が成り立つ. この  $X$  に対し, 補題 3-1 を適用することによって (a), (b) の例を構成できる. すなわち, (a) の例は,  $\Sigma^{2k+1} = S^{2k+1}/\mathbb{Z}_p$  を使えば良く, (b) の例については, 後

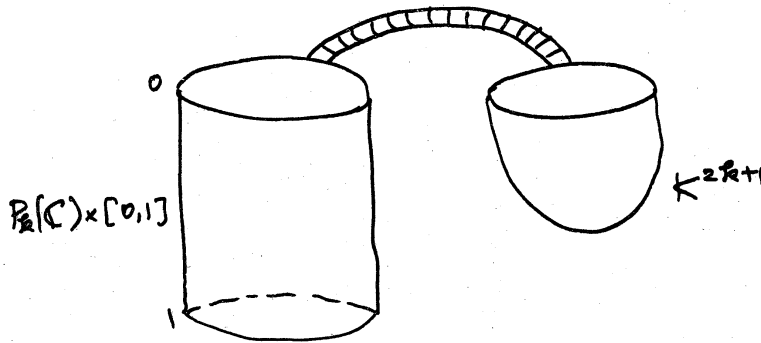


記の注3-3を参照せよ。

(ii) 次に (c) の例を構成しよう。  $K^{2k+1}$  をコンパクトで可縮な可微分多様体とし、

$$W = P_k(\mathbb{C}) \times [0, 1] \# K^{2k+1} \quad (\text{boundary connected sum})$$

とする。



すなわち、

$$\partial W = P_k(\mathbb{C}) \# \partial K \cup P_k(\mathbb{C}) \times 1$$

であり、  $P_k(\mathbb{C}) \times 1$  は  $W$  の deformation retract である。

故に、可微分主  $S^1$  束  $\pi: E \rightarrow W$  で

$$\begin{array}{ccc} \partial_1 E & \longrightarrow & P_k(\mathbb{C}) \times 1 \\ \parallel & & \\ \pi^{-1}(P_k(\mathbb{C}) \times 1) & & \end{array}$$

が、Hopf 束  $S^{2k+1} \rightarrow P_k(\mathbb{C})$  と同値に存在するものが存在する。

このとき、

$$X = E \cup_{\partial_1 E} D^{2k+2}$$

は、コンパクト可縮な  $2k+2$  次元可微分多様体で、準自由  $S^1$

作用をもち、 $\partial X$  上の  $S^1$  作用は free である。

$$\partial X/S^1 = \mathbb{P}_2(\mathbb{C}) \# \partial K$$

が成り立つ。この  $X$  に対して、補題 3-1 を適用することによって、(c) の例を構成できる。(注 3-3 参照)。(終)

注 3-3  $G$  を有限表示可能な群で、

$$H_1(G; \mathbb{Z}) = H_2(G; \mathbb{Z}) = 0$$

を満たすものとする。任意の  $m \geq 7$  に対して、コンパクト可縮な  $m$  次元可微分多様体  $K$  で、 $\pi_1(\partial K) = G$  を満たすものが存在する。さらに、この様な  $G$  は無数に存在することが知られている。(cf. 田村一郎: 多様体の多様性, 「数学」 21-4 (1969), 275-285)