数理解析研究所講究録
221巻 1974年 1-6

7次元ホモトピー球面の上の固定点をもたないSO(3)-作用について

津田塾大　吉田朋好

序

SO(3)を3次元ユークリッド空間の回転群とする。ホモトピー7次元球面の上の、固定点をもたない、なめらかなSO(3)-作用を、とくに軌道構造に重点をおいて調べるのが目的である。αとβを、SO(3)の3次元、5次元の実既約表現とする。このとき$\alpha\oplus\beta$は7次元球面S^7の上にSO(3)の線形作用をもたらすが、この線形作用は固定点をもたない。そして固定点をもたない線形作用は$\alpha\oplus\beta$に限られることも容易にわかる。

(Σ^7, φ)を7次元ホモトピー球面の上のなめらかなSO(3)-作用で固定点をもたないとする。我々は、(Σ^7, φ)の軌道構造が線形作用$\alpha\oplus\beta$の軌道構造と、どれ程異るか(又は、一致するか)を問題にする。正確に述べると、次のようになる。$x \in \Sigma^7$をΣ^7の点とし、

x の isotropy 群 G_x を $G_x = \{ g \in SO(3) \mid gx = x \}$ で定義する。$SO(3)$ の共役類の集合 $\{ (G_x) \mid x \in \Sigma^7 \}$ を (Σ^7, φ) の軌道構造と名付ける。線形作用 $\alpha \oplus \beta$ の軌道構造は $\{ (e), (Z_2), (D_2), (SO(2)), (N) \}$ となる。ここに e は $SO(3)$ の単位元、Z_2 は位数 2 の巡回群、D_2 は位数 4 の 2 面体群、N は $SO(2)$ の正規化群である。

我々は、次の 2 つの定理を得る。

定理 I.

(Σ^7, φ) を 7 次元ホモトピー球面の上の固定点をもたない、なめらかな $SO(3)$-作用とする。このとき (Σ^7, φ) の軌道構造は、次の 2 つのタイプのうちの一つとなる。

(a) $\{ (e), (Z_2), (D_2), (SO(2)), (N) \}$

(b) $\{ (e), (Z_2), (D_2), (SO(2)), (N), (Z_{2k+1}), (D_{2k+1}) \}$

(k: 正整数)

ここに Z_{2k+1} は位数 $2k+1$ の巡回群、D_{2k+1} は位数 $4k+2$ の 2 面体群。

(b) の軌道構造をもつ線形作用は存在しない。

定理 II.

任意の正整数kに対して、7次元標準球面S^7の上に、(b)の軌道構造をもつ$SO(3)$-作用が存在する。

我々は定理Ⅰの証明は省略し定理Ⅱの証明の概略を、次に述べる。

定理Ⅱの証明の概略

5次元実既約表現βは、次のようにして構成される。$SO(3)$を3×3-行列$g=(a_{ij})$で${}^t g\cdot g=$単位行列、$\det g=1$なるものの全体と同一視する。$\mathbb{R}^5_\beta$を3×3-対称行列$s=(s_{ij})$で$\mathrm{trace}\, s=\Sigma s_{ii}=0$なるもの全体のつくる、5次元実ベクトル空間とし、$SO(3)$の$\mathbb{R}^5_\beta$の上への作用を、$g\in SO(3)$, $s\in\mathbb{R}^5_\beta$に対し、$g\cdot s=gsg^{-1}$（行列の積）と定義する。$\mathbb{R}^5_\beta$の元sに対しsの norm $\|s\|$を$\|s\|^2=\mathrm{trace\ of}\ s^2$で定義する。この norm は$SO(3)$-不変である。

次に、3次元実既約表現αを次のように考える。$\mathbb{R}^3_\alpha$を3次元実ベクトル$\left\{\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix};\ v_i\text{は実数}\right\}$全体のなす空間とし、$SO(3)$の作用を、$g=(a_{ij})\in SO(3)$, $v=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$に

対し．$g\cdot v = (a_{ij})\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$（行列の積）で定義する。$v\in\mathbb{R}^3_\alpha$ の norm $\|v\|$ は．$\|v\|^2=\sum v_i^2$ で与えられる。

$\mathbb{R}^8_{\alpha\oplus\beta}$ を $\mathbb{R}^3_\alpha$ と $\mathbb{R}^5_\beta$ の直和とする（$SO(3)$-作用をこめて考える。）すなわち $\mathbb{R}^8_{\alpha\oplus\beta}=\mathbb{R}^3_\alpha\oplus\mathbb{R}^5_\beta$。 $x\in\mathbb{R}^3_\alpha$, $y\in\mathbb{R}^5_\beta$ に対し．$x+y\in\mathbb{R}^5_{\alpha\oplus\beta}$ の norm $\|x+y\|$ を $\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$ と定める。S^7 を $\mathbb{R}^8_{\alpha\oplus\beta}$ の単位球面とすれば．S^7 は $SO(3)$ の線形作用 $\alpha\oplus\beta$ をもった 7次元標準球面となる。

$v_1, v_2, v_3\in\mathbb{R}^3_\alpha$ を次のように定める．

$$v_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\qquad v_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\qquad v_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$y_1, y_2, y_3\in\mathbb{R}^5_\beta$ を次のように定める。

$$y_1=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\qquad y_2=\begin{bmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\-1&0&0\end{bmatrix}\qquad y_3=\begin{bmatrix}1&&0\\&1&\\0&&-2\end{bmatrix}.$$

$\mathbb{R}^8_{\alpha\oplus\beta}$ の 4次元部分空間 W（$SO(3)$-不変ではない）を次のように定める．

$W=\{v_3,\ v_1+y_1,\ v_2+y_2,\ y_3\}$ によってはられる部分空間．

$S = W \cap S^7$ とおく。このとき次のことがわかる。

補題 $g \in SO(3)$ に対し

$$gS \cap S \neq \phi \iff g \in N.$$

この補題によって、S^7 には、S の orbit GS として、$SO(3) \times_N S$ が embed されていることがわかる。$\mathbb{R}^2_{\delta_2}$ を 2次元実ベクトル空間で、N が $\delta_2 : N \to N/\mathbb{Z}_2 = N \to O(2)$ によって作用しているものとする。$SO(3) \times_N S$ の S^7 に於ける normal bundle は $SO(3) \times_N (S \times \mathbb{R}^2_{\delta_2})$ と equivariant に同型であることがわかる。従って、$\mathbb{R}^2_{\delta_2}$ の単位球体を $D^2_{\delta_2}$ とした時、$SO(3) \times_N (S \times D^2_{\delta_2})$ は S^7 に embed されている。

W_k を 4次元実ベクトル空間で、N が $\psi_k : N \to N/\mathbb{Z}_{2k+1} = N \subset SO(3) \subset SO(4)$ によって作用しているものとする。$\partial D^2_{\delta_2}$ を $D^2_{\delta_2}$ の boundary とする。

補題 S_k を W_k の単位球面とする。このとき、N-equivariant diffeomorphism $H : S \times \partial D^2_{\delta_2} \to S_k \times \partial D^2_{\delta_2}$ が存在する。

そこで、$SO(3)$-manifold Σ^7_k を

$$\Sigma_k^7 = \overline{(S^7 - SO(3)\times_N (S\times D^2_{\delta_2}))} \cup_{\widetilde{H}} SO(3)\times_N (S_k\times D^2_{\delta_2})$$

と定義する。ただし、$\widetilde{H} = 1\times_N H : SO(3)\times_N (S\times\partial D^2_{\delta_2}) \longrightarrow SO(3)\times_N (S_k\times\partial D^2_{\delta_2})$. SO(3)-manifold Σ_k^7 の軌道構造は定理I の (b) になる。Σ_k^7 がホモトピー球面であることは Mayer-Vietoris 系列と van-Kampen の定理から出る。さらに、Σ_k^7 を境界にもつ指数 0 の 8次元平行化可能な manifold が得られ、Σ_k^7 は 7次元標準球面と微分同相となる。

Reference.

T. Yoshida : On fixed point free SO(3)-actions on homotopy 7-spheres

(プレプリント)