数理解析研究所講究録
222巻 1974年 109-120

平均型の Tauber 条件

岡山大 理　鹿野　健

A. Tauber [7] は 1897 年に次の定理を証明した：
複素数項の級数

(0) $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

が和 A に Abel 総和可能であって，a_n の大きさが

(1) $$a_n = o\left(\frac{1}{n}\right), \quad (n \to \infty)$$

であるならば，必然的に(0)が A に収束する。 そして，(1)の替りに

(2) $$\sum_{k=0}^{n} k a_k = o(n), \quad (n \to \infty)$$

としても同じ結論が得られる。

今日，この種の定理，即ちある何らかの総和可能性から，Tauber 条件と言われる(1)のような order condition の下で原級数の収束を結論する定理の事を，「Tauber 型定理」

と呼ぶ。　Tauber 以後，その理論と応用は様々な方向に増々深く進んで，特に数論と解析学において著るしい成果を挙げて来た。Wiener によるその一般化は，Tauber型定理を調和解析的な視点から捉えて広汎な応用を目指したものとみなされるが，それは現代的な理論と応用の基礎となった。ここで私が論じようとするのは，そのような方向の問題ではなくて，応用の範囲を特に数論のある種のものに限って念頭に置いたものであり，まだ進行中のものでもあるので，一般化の問題については全く触れない。

いわゆる「円の問題（格子点問題とも言う）」や「約数問題」において，我々は

(3) *)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(n)}{n^{\alpha}} e^{4\pi i\sqrt{nx}}$$

(4)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^{\alpha}} e^{2\pi i\sqrt{nx}}$$

なる級数に出会うが，それらの収束する（$x \notin \mathbf{N}$ に対して）ことが重要であり基本的であるにもかかわらず，その証明はそう容易ではない。実際，Hardy [1] は(3)が $\forall x \notin \mathbf{N}$ に対して Abel 総和可能である事を示したが，その収束性を示すために更に別な途を選んでいる。私は，そこで実は(2)の

*) $r(n)$ は，不定方程式 $x^2+y^2=n$ の解の個数を表わす。

タイプの条件をverify する事によって直接に(3)の収束性を結論できることに気付いた。(2)のような条件を，私は表題のように，「平均型のTauber 条件」と呼ぶことにしている。

論理的には(2)は(1)を含んでいるので更に良いはずであるが，応用上は必ずしも常にそうとは言い切れない。上に述べたHardy の問題においては，明かに(1)は適用できず，(2)が真価を発揮する。この平均型のTauber 条件についての研究は，(1)に比べると今まで余りなく，そのかなり系統的な研究は主として W. Meyer-König や H. Tietz による最近のもののようである[3][4][5][8]。Abel 総和法以外の総和法に対する平均型のTauber 条件が，それらによって知られていて，その幾つかに関しての私の結果もあるが[2]，ここではCesàro 総和法の平均型Tauber 条件について，更に別の方向を考えてみよう。その結果は，(3)や(4)の級数の収束性の証明に役立つだけでなく，他にも応用の余地が十分あると思われる。

それは，簡単に言ってしまえば，(2)では和を $k=0$ から n まで full に取っている訳だが，それを半分の $k=\frac{n}{2}$ から n までの和で間に合せようというものである。

Cesàro 総和法においては，(2)の形の平均型条件以外に次のような平均型条件も知られている。即ち，

(5) $$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k} = o\left(\frac{1}{n}\right), \quad (n\to\infty).$$

これについても，和の範囲を $k=\frac{n}{2}$ から n までで間に合わせる事を考える。

以上に関して私の得た結果のうちの代表的なものは次のような定理である。

［定理１］ (0)が A ($\neq\pm\infty$) に (C, 1) 総和可能であるとき，(0)が A に収束するための必要十分条件は

(6) $$\sum_{\substack{x<k\leq 2x \\ (x\in R^1)}} k\,a_k = o(x) \qquad (x\to+\infty)$$

である。

［定理２］ (0)が A ($\neq\pm\infty$) に (C, 1) 総和可能であって，

(7) $$a_n > -Kn^{\alpha} \quad (\text{当然 } a_n \text{ は実数とする。})$$

$$-1\leq\alpha<1, \quad K>0,$$

となる定数 α，K が存在するときは，(0)が A に収束するための必要十分条件は

(8) $$\sum_{n<k\leq 2n}\frac{a_k}{k} = o\left(\frac{1}{n}\right), \quad (n\to+\infty)$$

である。

これらの定理を証明する前に，次のことを注意して置こう。 条件の(6)や(8)は，一見すると k が各々の範囲内のすべて

の整数値を取らなくてはならないようであるが，実際の応用では単に両端の整数値のみで決まってしまうものである。しかし，それよりも厳しく，真に範囲内のすべての整数値を要求するタイプの定理もあり，それは誠に単純に証明できる。その代表的なものは次の定理である。

[定理3]　(0)がAに(C，1)総和可能であるとき，(0)がAに収束するための必要十分条件は，$n \le m \le 2n$ なる任意の整数mに対して

(9) $$\sum_{m<k\le 2n} k a_k = o(n), \quad (n\to\infty)$$

となることである。

(証明)　(9)の替りに，それと同値な*)

(10) $$\sum_{m<k\le 2n} \frac{a_k}{k} = o\left(\frac{1}{n}\right), \quad (n\to\infty)$$

について定理を証明しよう。*Partial summation* によって，

$$s_n \overset{df.}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k, \quad a_0 = s_0 = 0$$ とすると，

$$\sum_{n<k\le 2n} \frac{a_k}{k} = \sum_{n<k\le 2n} (s_k - s_{k-1})\frac{1}{k}$$

(11) $$= \sum_{n\le k<2n} \frac{s_k}{k(k+1)} + \frac{s_{2n}}{2n} - \frac{s_n}{n}.$$

*) 同値性は *partial summation* によって容易に示される。

$A=0$ と仮定しても一般性は失わないからそのように仮定すると，

(12) $\qquad t_n \overset{\text{df.}}{=} n\sigma_n \overset{\text{df.}}{=} \sum_{k=1}^{n} s_k = o(n)$ ，$(n \to +\infty)$

であり，従って再び partial summation によって

$$\sum_{n<k\leq 2n} \frac{s_k}{k^2} = \sum_{n<k<2n} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right) t_k + \frac{t_{2n}}{(2n)^2} - \frac{t_n}{(n+1)^2}$$

$$= \sum_{n<k<2n} o\left(\frac{1}{k^3}\cdot k\right) + o\left(\frac{1}{n}\right) = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

従って，(11)より，

(13) $$\frac{s_{2n}}{2n} - \frac{s_n}{n} = \sum_{n<k\leq 2n} \frac{a_k}{k} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

そして，全く同様にして，*) $\forall m$ ，$n \leq m \leq 2n$ に対して

(14) $$\frac{s_{2n}}{2n} - \frac{s_m}{m} = \sum_{m<k\leq 2n} \frac{a_k}{k} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

この(14)から直ちに分ることは，(0)が（0に）収束するためには(10)が必要なことである。 そこで逆に(10)が十分でもあることを示そう。 (13)（あるいは(14)）から，(10)の下では

$$s_{2n} - s_n = o(1),$$

即ち，

(15) $$\sum_{n<k\leq 2n} a_k - s_n = o(1),$$

---

*) 定理2の証明に必要なのでわざわざ(13)と(14)の2つを記したが，本質的には同じもの．

を得る。 所が，partial summation によって，

$$\sum_{n<k\leq 2n} a_k = \sum_{n<k\leq 2n} k\frac{a_k}{k} = \sum_{n<k\leq 2n}\{k-(k+1)\}A_k \tag{16}$$

$$+(n+1)A_{2n}$$

$$= (n+1)A_{2n} - \sum_{n<k\leq 2n} A_k .$$

ここに，
$$A_k \overset{df.}{=} \sum_{n<l\leq k}\frac{a_l}{l} .$$

(10)より，$\forall k$，$n\leq k\leq 2n$ に対して

$$A_k = \sum_{n<l\leq 2n}\frac{a_l}{l} - \sum_{k<l\leq 2n}\frac{a_l}{l} = o\left(\frac{1}{n}\right)+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= o\left(\frac{1}{n}\right).$$

故に，(16)より，

$$\sum_{n<k\leq 2n} a_k = o(1) + o\left(\sum_{n<k\leq 2n}\frac{1}{n}\right) = o(1).$$

従って(15)より，

$$s_n = o(1).$$

これで定理3は証明された。

次に定理2を証明しよう。 (8)の必要性はすでに定理3で示したので，十分であることを以下に示そう。 その前に，次の補題を述べて置こう。

（補題）（L. J. Mordell [6]）

(0)が0に(C, 1)総和可能であって，

$$a_n > -K n^{\alpha}$$

$$(-1 \leq \alpha < 1,\ K > 0;\ a_n \text{は実数})$$

となるならば，$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = o\left(n^{\frac{1+\alpha}{2}}\right)$.

さて，(8)と(13)から，

(17) $$\frac{s_{2n}}{2n} - \frac{s_n}{n} = o\left(\frac{1}{n}\right),$$

となるので，

$$u(n) \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{s_n}{n}$$

と書くことにすれば(17)は

(18) $$u(2n) - u(n) = o\left(\frac{1}{n}\right),$$

となる。そこで，

$$n = 2^{l} k, \quad (k:\text{十分大})$$

$$m = \left[\frac{1+\alpha}{1-\alpha}(\log_2 k)\right], \quad (-1 < \alpha < 1)^{*)}$$

として，(18)の辺々を $l = 1$ から m まで加えれば，

$$u(2^m k) - u(2k) = o\left(\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots\right)\right)$$
$$= o\left(\frac{1}{k}\right).$$

---

*) $\alpha = -1$ のときは有名な Hardy - Littlewood の Tauber型定理になり，明かなので $-1 < \alpha < 1$ とする。

即ち，

(19) $$u(2k)=u(2^m k)+o\left(\frac{1}{k}\right).$$

一方，仮定 $A=0$ と(7)より，補題によって

$$u(2^m k)=\frac{S_{2^m k}}{2^m k}=o\left((2^m k)^{\frac{1+\alpha}{2}-1}\right)$$

$$=o\left(\left(2^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\log_2 k}\cdot k\right)^{\frac{1-\alpha}{2}}\right)=o\left(\frac{1}{k}\right),\quad (k\to\infty).$$

従って(19)より

$$u(2k)=o\left(\frac{1}{k}\right),\quad (k\to\infty).$$

故に(18)より

$$u(n)=o\left(\frac{1}{n}\right),\quad (n\to\infty),$$

即ち

$$S_n=o(1),\quad (n\to\infty)$$

となり，定理2は証明された。

最後に定理1を証明しよう。それは定理2の証明と本質的には同じものであるが，(7)のような付帯条件に依らない代りに，(6)において x は自然数だけではない事が避けられなくなっている。その理由は以下の証明から明かとなる。

いま，

$$B(x)\overset{df}{=}\sum_{k\le x} k a_k$$

とすれば，(0)が収束するために $B(x)=o(x)$ が必要であることは知られているので，

(20) $$C(x) \overset{\mathrm{df.}}{=} \sum_{x<k\leq 2x} k a_k = B(2x) - B(x)$$

に注意すれば(6)が必要であることはそれから明かである。

従って，(6)が十分であることを示せば良いが，(6)と(20)より

(21) $$B(2x) - B(x) = o(x)$$

となるので，$A=0$ という仮定の下では $B(x)$ の大きさがどの程度かをまず考えよう。すると，

$$\sigma_n \overset{\mathrm{df.}}{=} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k = s_n - \frac{1}{n}B(n),$$
$$s_n = o(n),^{*)}$$

の2つから，明かに $B(n)=o(n^2)$ となる。

よって，

(22) $$B(x) = o(x^2). \qquad (x\to\infty)$$

そこで，(21) において，x の所に

$$\frac{x}{2^k} \quad (k=1, 2, \dots, m)$$
$$m = [\log_2\sqrt{x}\,]$$

と次々に代入して辺々加え合せれば，

*) $\sigma_n = o(1)$ より，$n\sigma_n = o(n)$ となるので，

$s_n = n\sigma_n - (n-1)\sigma_{n-1} = o(n)$.

$$B(x) - B\left(\frac{x}{2^m}\right) = o\left(x\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\right)\right)$$
$$= o(x),$$

i.e.

(23) $$B(x) = B\left(\frac{x}{2^m}\right) + o(x),$$

を得る。 所が，(22) より

$$B\left(\frac{x}{2^m}\right) = o\left(\frac{x^2}{2^{2m}}\right) = o\left(\frac{x^2}{2^{\log_2 x}}\right) = o(x),$$

となるので，(23) より

$$B(x) = o(x).$$

従って，

$$s_n = \sigma_n + \frac{1}{n}B(n) = o(1) + o(1) = o(1),$$

となり，定理 1 が証明された。

[文 献]

[1] G. H. Hardy : *Collected Papers*, vol. II, p. 329 ~ 56.

[2] T. Kano : 実函数論－函数解析学合同シンポジュうム（於九州工大，1973 年 7 月）講演集録，p. 34 ~ 45.

[3] W. Meyer-König and H. Tietz : Bull. Amer. Math. Soc., (1967) 6, p. 926 ~ 7.

[4] ———— : Studia Math. 31 (1968), p. 205 ~ 16.

[5] ———— : Arch. Math. (Brno) 5, (1969), p. 177 ~ 86.

[6] L. J. Mordell : Journ. London Math. Soc. 3 (1928) p. 86 ~ 9.

[7] A. Tauber : Monatsh. Math. Phys. 8 (1897), p. 273 ~ 77.

[8] H. Tietz : Monatsh. für Math., 75 (1971), p. 69 ~ 78.